

APR 29 1932

5. FOLGE, 1932, BAND 13, HEFT 2

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 405. Band

Kuratorium:

W. Gerlach	F. Paschen	M. Planck
R. Pohl	A. Sommerfeld	M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit 37 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1932 erscheinen die Bände 12, 13, 14 u. 15 mit je 8 Heften. Der Abonnements-
preis beträgt pro Band RM. 28.— zuzüglich RM. 1.20 für Porto bei direkter Zusendung
für das Inland und RM. 2.— für das Ausland. In Ausnahmefällen Ergänzungshefte
gegen besondere Berechnung. Redaktionsschluß am 8. April 1932.

Inhalt

	Seite
Otto Scherzer-München, Über die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen. (Mit 3 Figuren) . .	137
A.-W. Maue-Hamburg, Das kontinuierliche und kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum nach der Theorie von Kramers und nach der Wellenmechanik. (Mit 8 Figuren).	161
H. Collenbusch-Erlangen, Untersuchungen an Ultrakurzwellenröhren. (Mit 16 Figuren)	191
E. Waetzmann und F. Noether-Breslau, Über akustische Filter. (Mit 10 Figuren)	212
Herbert Fröhlich-Freiburg i. Br., Theorie der Sekundärelektronenemission aus Metallen	229

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrucke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung der Korrekturen an den Verlag auf dem besonderen Bestellzettel, welcher den Korrekturen beiliegt, vermerkt werden.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

ite

37

61

91

12

29

e-

at

n.

in

zu

n,

cit

es

en

ie

d-

st

et.

it-

st.

b-

pt

en

n.

el

a-

>

A

5.

von
Voll
ausse
bild
Lad
Bren
lung
der
korre
tivis

Elel
gene
Fun
Wel
Fun
gleich
von
zu f
sei c

Rech
stän
A v
und
biete
dies

gende

An

Über die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen¹⁾

Von Otto Scherzer

(Mit 3 Figuren)

Übersicht: Die Rechnungen werden im Anschluß an eine Arbeit von A. Sommerfeld²⁾ durchgeführt. § 1 erbringt den Nachweis der Vollständigkeit des dort verwendeten Orthogonalsystems unter der Voraussetzung, daß die polaren Eigenfunktionen ein vollständiges System bilden. § 2 behandelt den Einfluß der Masse und des Vorzeichens der Ladung auf die Ausstrahlung. In § 3 wird die Intensität der bei der Bremsung von Protonen am nackten Kern zu erwartenden Röntgenstrahlung berechnet. § 4 enthält die Berechnung der Richtungsverteilung der gebremsten Elektronen unter Vernachlässigung der Relativitätskorrektur. Am Schlusse der Arbeit werden die Ergebnisse einer relativistischen Behandlung des Problems mitgeteilt.

§ 1. Nachweis der Vollständigkeit des den Rechnungen zugrunde liegenden Orthogonalsystems

In der Arbeit über die Beugung und Bremsung der Elektronen von A. Sommerfeld²⁾, an die sich die nachfolgenden Ausführungen anschließen, wurde nicht wie üblich ein Funktionensystem benutzt, das sich aus der *Separation* der Wellengleichung ergibt, sondern ein System, dessen sämtliche Funktionen aus einer speziellen Lösung der Differentialgleichung durch *Drehen im Raume* hervorgehen. Es ist nicht von vornherein selbstverständlich, daß dieses System auch die zu fordernde Eigenschaft der Vollständigkeit besitzt; deshalb sei der Beweis hier nachgetragen.

Wir wollen dabei mit Rücksicht auf unsere späteren Rechnungen einen kleinen Umweg einschlagen und die Vollständigkeit desjenigen Systems beweisen, das man aus dem in A verwendeten, durch Übergang zum konjugiert Komplexen und räumliche Drehung um 180° erhält. Dieses neue System bietet für die Durchrechnung von § 4 erhebliche Vorteile, und dies ist der Grund, warum wir es schon hier einführen.

1) Gekürzte Münchener Dissertation.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 257. 1931; im folgenden mit A zitiert.

Gleichzeitig mit der Vollständigkeit dieses Systems ist dann natürlich auch die des in A benutzten bewiesen.

Die in A als Ausgangspunkt gewählte Lösung der Wellengleichung lautet [vgl. A (55)]:

$$(1,1) \quad e^{ikx} L_n(ik\eta), \quad \eta = r - x.$$

Nach A (54) stellt sie ein Elektron dar, das als *nahezu ebene*, in der x -Richtung fortschreitende Welle *einfällt* und den Anziehungsbereich des Kerns als *divergente Welle* verläßt.

Durch räumliche Drehung um 180° ($x \rightarrow -x$) und Übergang zum konjugiert Komplexen entsteht daraus

$$(1,2) \quad \{e^{-ikx} L_n(ik\xi)\}^* = e^{ikx} L_n(-ik\xi), \quad \xi = r + x.$$

Das hierdurch dargestellte Elektron *fällt* als *konvergente Welle ein* und *verläßt* den Kern als in der x -Richtung fortschreitende *nahezu ebene* Welle. Der Vorteil dieser Funktion besteht darin, daß nunmehr das Gebiet, in dem das Argument der Laguerrefunktion auch bei noch so großer Entfernung vom Kern beliebig klein sein kann, in dem sich also keine asymptotische Entwicklung angeben läßt, nicht mehr in der Austrittsrichtung des Elektrons gelegen ist. Dies sichert den später abzuleitenden Formeln einen größeren Geltungsbereich.

Zum Nachweis der Vollständigkeit des durch räumliche Drehung von (1,2) entstehenden Systems werden wir nun zeigen, daß jede einem positiven Energiewert zugeordnete Funktion aus dem von uns als vollständig vorausgesetzten System der Lösungen der Wellengleichung in Polarkoordinaten sich aus Funktionen unseres Systems zusammenbauen läßt.

Sind ϑ und φ Winkelkoordinaten derart, daß

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

so schreibt sich *die* Funktion unseres Systems, die ein in der Richtung $\vartheta = \alpha$, $\varphi = \beta$ austretendes Elektron darstellt, nach A (55), (45) und (62):

$$(1,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(\alpha, \beta, k) &= e^{ikx'} L_n(-ik(r+x')) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int (y + \frac{1}{2})^{-n} (y - \frac{1}{2})^{n-1} \\ &\quad \cdot e^{ikr(y - \frac{1}{2})} e^{ikx'(y + \frac{1}{2})} dy. \end{aligned} \right.$$

$$(1,31) \quad x' = r \cos \vartheta \cos \alpha + r \sin \vartheta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta).$$

Die allgemeinste zum Eigenwert k gehörige Lösung, die sich daraus aufbauen läßt, lautet, wenn wir uns den „Gewichtsfaktor“ nach Kugelfunktionen entwickelt denken:

$$(1,4) \quad \psi = \int \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \, \psi(\alpha, \beta, k) \sum_{l, m} a_{lm} P_l^m(\cos \alpha) e^{im\beta}$$

mit willkürlichen Koeffizienten a_{lm} . Die Summe geht über l von Null bis ∞ , über m von $-l$ bis l .¹⁾

Um die Integration nach α und β auszuführen, tragen wir in (1,3) den bekannten Ausdruck A (20) für die ebene Welle in Polarkoordinaten ein (J bedeutet die Besselsche Funktion):

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{ikx'(y + 1/2)} &= \sum_{l'} (2l' + 1) i^{l'} \sqrt{\frac{\pi}{2kr(y + 1/2)}} \\ &\cdot J_{l' + 1/2}(kr(y + 1/2)) P_{l'}\left(\frac{x'}{r}\right), \end{aligned} \right.$$

wobei nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen gilt:

$$(1,6) \quad P_{l'}\left(\frac{x'}{r}\right) = \sum_{m'} \frac{(l' - m')!}{(l' + m')!} P_{l'}^{m'}(\cos \vartheta) P_{l'}^{m'}(\cos \alpha) e^{im'(\varphi - \beta)}.$$

Führen wir nun die in (1,4) vorgesehene Integration durch, so verschwinden alle Glieder, für die nicht $l = l'$, $m = m'$ ist, und wir erhalten:

$$(1,7) \quad \psi = \sum_{l, m} a_{lm} R(n, ikr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

$$(1,8) \quad \left\{ \begin{aligned} R(n, ikr) &= \sqrt{2\pi} i^{l-1} \int (y + 1/2)^{-n} (y - 1/2)^{n-1} \\ &\cdot e^{ikr(y - 1/2)} \frac{J_{l+1/2}(kr(y + 1/2))}{\sqrt{kr(y + 1/2)}} dy. \end{aligned} \right.$$

Wir behaupten nun, daß schon das einzelne Summenglied

$$(1,9) \quad R(n, ikr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

der üblichen Eigenfunktion in Polarkoordinaten proportional ist. Wäre dies nicht der Fall, so wäre, da es im Polarkoordinatensystem nur eine Lösung mit der Winkelabhängigkeit $P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$ gibt, (1,9) eine Eigenfunktion, die nicht in diesem System darstellbar ist; wir hätten also einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß das polare System voll-

1)

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m.$$

ständig ist. Wir brauchen daher in (1,4) nur alle $a_{l,m}$ mit Ausnahme eines einzigen, a_{l_0, m_0} , gleich Null zu setzen, um die *polare Eigenfunktion* mit den Nebenquantenzahlen l_0, m_0 zu erhalten.

Geht man statt von (1,2) von A (32) aus, so zeigt sich, daß bei jedem kugelsymmetrischen Potential, das im Unendlichen mindestens wie $1/r$ verschwindet, durch räumliche Drehung der Streuwelle ein vollständiges Orthogonalsystem entsteht. In Zusatz 1 werden wir $R(n, i k r)$ so umformen, daß man seine Proportionalität mit dem Radialteil der Eigenfunktion in Polarkoordinaten erkennt.

§ 2. Einfluß der Masse und des Vorzeichens der Ladung auf die Ausstrahlung

Wenn man die Ergebnisse von A auf die Bremsung von Protonen überträgt, hat man zwei Unterschiede zu beachten: die größere Masse und das umgekehrte Vorzeichen der Ladung. In die Wellengleichung

$$(2,1) \quad \Delta \psi + k^2 \psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r) \psi = 0$$

geht die Masse nicht wesentlich ein. Setzt man $r = \frac{r'}{m}$,

$x = \frac{x'}{m}$ usw., so wird aus (2,1):

$$\Delta' \psi + \frac{k^2}{m^2} \psi - \frac{8\pi^2}{m h^2} V\left(\frac{r'}{m}\right) \psi = 0,$$

oder wegen

$$k = \frac{2\pi}{h} m v, \quad V(r) = \frac{-Ze^2}{r};$$

$$\Delta' \psi + \frac{4\pi^2}{h^2} v^2 \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} \frac{Ze^2}{r'} \psi = 0.$$

Bei gleicher Geschwindigkeit der stoßenden Teilchen besteht also der Einfluß der Masse lediglich darin, daß sich bei größerer Masse die Eigenfunktionen im Verhältnis der Massen um den Kern zusammenziehen. Dies bedeutet, daß bei der Berechnung der Intensität eine bestimmte Potenz der Masse vor das Integral tritt, während der *Rest massenunabhängig* ist.

Als nächstes interessiert der Einfluß der Masse auf die *Voreilung* des Intensitätsmaximums. Die Voreilung ist als eine Auswirkung des Impulses der stoßenden Partikel zu betrachten und man möchte zunächst eine Zunahme mit wachsendem Impuls, also bei gleicher Geschwindigkeit mit wachsender

Masse erwarten. Es ist jedoch zu bedenken, daß die dabei zunehmende Masse der Lichtquanten der Voreilung entgegenwirkt. Tatsächlich heben sich beide Einflüsse auf. Sind die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten beider Partikeln beziehungsweise gleich, so wird die Wellenzahl κ im Retardierungsfaktor $\exp\{i\kappa(r)\}$ ebenfalls proportional m , d. h., der Retardierungsfaktor ist bei wachsender Masse derselben Transformation unterworfen wie die Eigenfunktionen. Die Voreilung ist also bei festgehaltenen Anfangs- und Endgeschwindigkeiten von der Masse unabhängig.

Von größerem Einfluß ist das Vorzeichen der Ladung. Es wirkt sich dadurch aus, daß im Falle der Abstoßung in (2,1) und damit auch in sämtlichen anderen Formeln Z durch $-Z$ zu ersetzen ist. Zwar kommen in den Gl. A (83), (97) und (106a, b) Kernladungszahl Z und imaginäre Einheit i , abgesehen vom Faktor $(-1)^{-n_1}$, nur miteinander multipliziert vor ($n_{1,2} = \frac{-iZ}{ak_{1,2}}$), so daß bei der Bildung des Absolutwertes das Vorzeichen von Z unwesentlich wird, aber die Größe $(-1)^{-n_1}$ und der Normierungsfaktor (A, Note 10) sind gegen den Vorzeichenwechsel um so empfindlicher.

Fassen wir alle im Ausdruck für die Intensität vorkommenden, vom Vorzeichen von Z abhängigen Größen zusammen, so erhalten wir¹⁾:

$$(-1)^{-2n_1} N_1^2 N_2^2 = \frac{|n_1| \cdot |n_2|}{(2\pi)^4} e^{-2\pi|n_1|} \cdot G.$$

$$(2,2) \quad G = \frac{e^{\pi(|n_1| - |n_2| - i(n_1 - n_2))}}{(1 - e^{-2\pi|n_1|})(1 - e^{-2\pi|n_2|})},$$

d. h. also: beim Übergang von Anziehung zu Abstoßung tritt vor die Intensität ein Faktor

$$(2,21) \quad e^{-2\pi|n_2 - n_1|} = e^{-2\pi|n_1| \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right)}.$$

1) Daß in A (83) und (97) (-1) wirklich $e^{i\pi}$ und nicht $e^{-i\pi}$ bedeutet, ergibt sich daraus, wie beim Übergang von A (71) zu A (78a, b) von der analytischen Fortsetzbarkeit Gebrauch gemacht wurde. Man kann Y und Y_1 in (71) nur fortsetzen, solange $|\arg(q-p)| < \frac{\pi}{2}$,

$|\arg(q-p-ik_1)| < \frac{\pi}{2}$. Mit Rücksicht auf (69) geht also bei positiv

reellem k_1 in (78) $\arg \frac{q-p}{q-p-ik_1}$ schließlich gegen $i\pi$.

Bei einer Protonenenergie von 20 kV ist $|n_1|$ ungefähr gleich $|Z|$, so daß der Vorzeichenwechsel von Z für mittlere Frequenzen ($v_2 \sim \frac{2}{3} v_1$) einen Faktor $e^{-\pi|Z|}$ ausmacht. Der Grund dafür, daß sich mit den heutigen Mitteln ein Bremspektrum der Protonen nicht nachweisen läßt¹⁾, dürfte in erster Linie in dieser Tatsache zu suchen sein. Vom Standpunkt der alten Quantentheorie läßt sich dies so verstehen, daß bei Abstoßung die Partikeln die Kernnähe mit geringerer Geschwindigkeit passieren und die größeren Frequenzen in der Ausstrahlung deshalb stark zurücktreten. Im folgenden Paragraphen werden wir diese Ergebnisse nach der *quantitativen* Seite ergänzen.

§ 3. Über die Bremsstrahlung langsam bewegter Partikel, insbesondere von Protonen

In A wurde, abgesehen von der Polarisierung an der kurzwelligen Grenze nur der Fall ausführlich diskutiert, daß $|n_1| \ll 1$ ist, d. h. Anfangsgeschwindigkeit $v_1 \gg Z \cdot c/137$. Wir werden uns in diesem Paragraphen mit dem entgegengesetzten Grenzfall beschäftigen und unter langsamen Partikeln solche verstehen, für die $137 v_1 \ll Z \cdot c$ ist. Zu diesem Zwecke lassen wir in unseren Formeln v_1 und damit auch v_2 gegen Null gehen. Denken wir uns dabei, was nicht unbedingt nötig ist, die Energiewerte $E_{1,2} = \frac{1}{2} m v_{1,2}^2$ festgehalten, so entspricht dies genau dem Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$. Man erkennt dies daraus, daß sich die Wellengleichung (2,1) so schreiben läßt, daß darin nur $\hbar v$ vorkommt:

$$(3,1) \quad \Delta \psi + \frac{16\pi^2 E^2}{\hbar^2 v^2} \psi + \frac{16\pi^2 E}{\hbar^2 v^2} \frac{Ze^2}{r} \psi = 0.$$

Diesen Grenzübergang werden wir in Zusatz 2 durchführen. Denken wir uns, wie schon in § 1, ψ_2 nicht durch den Ausdruck A S. 293 unten, sondern durch (1,3) gegeben, so haben wir in den Matrixelementen A(97) k_2 durch $-k_2$, α durch $\pi - \alpha$ und β durch $\pi + \beta$ zu ersetzen, da durch diese Vertauschung die beiden ψ ineinander übergehen.²⁾ Dadurch erhalten wir aus A(97), wenn wir noch die in A auf S. 298 angegebenen Formeln anwenden:

1) Vgl. z. B. H. A. Barton, Journ. Franklin Inst. 209, Nr. 1, 1930.

2) Daß die Intensitäten dadurch nicht geändert werden, ist wegen der Orthogonalität und Vollständigkeit beider Systeme selbstverständlich und läßt sich auch unschwer verifizieren.

$$(3,2) \begin{cases} M_x = -B \left\{ (k_1 - k_2 \cos \alpha) F(1+n_1, 1+n_2, 1, x) \right. \\ \quad \left. + 2k_1 n_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} F(1+n_1, 1+n_2, 2, x) \right\}, \\ \frac{M_y}{M_z} = B \sin \alpha \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} (k_1 n_1 + k_2) F(1+n_1, 2+n_2, 2, x) \\ B = \frac{16\pi k_1 n_1 e^{-i\pi n_1}}{(k_1^2 - k_2^2)^2 (k_1 - k_2)^2} \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right)^{n_1 + n_2}, \\ x = \frac{-4k_1 k_2}{(k_1 - k_2)^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 1) \end{cases}$$

Setzen wir nun $n_1 = \rho n_2 = -i\rho n$, wobei $0 \leq \rho \leq 1$, so geht beim Grenzübergang $v_1 \rightarrow 0$ unser n gegen ∞ oder $-\infty$, je nach dem Vorzeichen der Ladung. Da die F reelle Funktionen sind, bedeutet ein Wechsel im Vorzeichen von n lediglich den Übergang zum konjugiert Komplexen, und wir können uns auf den Fall $n \rightarrow +\infty$ beschränken. Bei diesem Grenzübergang stellt sich heraus, daß in dem nach A (59) zu bildenden Integral

$$\int |M_q|^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$$

die Stelle $\alpha \sim \pi$ den wesentlichen Beitrag liefert. Aus Zusatz 2 entnehmen wir als Grenzwerte für große $|n_1|$ und für α in der Nähe von π :

$$(3,3) \begin{cases} |M_x| = \frac{k_1 |B|}{8\sqrt{3}} \alpha'^2 \frac{(1-\varrho)^3}{(1+\varrho)^3} |H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(s)| e^{|n_1|\pi}, \\ \frac{|M_y|}{|M_z|} = \frac{k_1 |B|}{8\sqrt{3}} \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \alpha'^2 \frac{(1-\varrho)^3}{(1+\varrho)^3} |H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(s)| e^{|n_1|\pi}. \end{cases}$$

$$(3,31) \quad s = \frac{i|n_1|\alpha'^3}{6} \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^2}; \quad \alpha' = \pi - \alpha; \quad \varrho = \frac{k_2}{k_1}.$$

$H^{(1)}$ bedeutet dabei die erste Hankelsche Funktion. Die Integrale nach α haben nun genau die Form von A (87) und

1) Die Reihe A (93) ist als Definition der F nur verwendbar, solange $|x| < 1$. Sie läßt sich jedoch wieder anwenden, wenn man die Relation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

benutzt [man führe zum Beweise in Zusatz 2 (a) $-y$ als Integrationsvariable ein], da $\frac{x}{x-1}$ in unserem Falle stets zwischen Null und 1 gelegen ist.

man erhält auf demselben Wege wie dort¹⁾, wenn man schließlich den Wert von $|B|$ aus (3,2) einsetzt

$$(3,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int |M_x|^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta &= \frac{2^8 \pi^2}{3 \sqrt{3} (k_1^3 - k_2^3)^4} e^{2\pi(|n_1| - i n_1)}, \\ \int \left\{ \left| \frac{M_x}{M_x'} \right|^2 \right\} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta &= \frac{2^6 \pi^2}{3 \sqrt{3} (k_1^3 - k_2^3)^4} e^{2\pi(|n_1| - i n_1)}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben also zunächst folgendes Resultat: *Für kleine Anfangsgeschwindigkeiten ist der Depolarisationsgrad*, gegeben durch das Verhältnis der 2. zur 1. Zeile in (3,4), *von der Endgeschwindigkeit, also auch von der Frequenz unabhängig* und hat bei Beobachtung senkrecht zur Einfallrichtung den in A für die kurzweilige Grenze berechneten Wert $D = \frac{1}{4}$.

Um die ausgestrahlte Intensität zu erhalten, müssen wir noch die in A auf S. 300 angeführten Faktoren a) bis e) hinzufügen und erhalten, wenn wir die in A gestrichenen universellen Konstanten²⁾ hinzunehmen:

$$(3,5) \quad J_v = \frac{8\pi Q}{3 \sqrt{3} \cdot R} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{(Ze^2)^3}{v_1^2 c^3} \left[\sin^2 \Theta + \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \Theta) \right] \cdot G.$$

Q ist dabei die Zahl der pro Sekunde durch den Quadratcentimeter hindurchtretenden Partikeln, R der Abstand des Beobachters vom streuenden Kern und Θ der Winkel zwischen Einfall- und Beobachtungsrichtung; Ze^2 ist das Produkt der Ladungen, e/m die spezifische Ladung der leichteren³⁾ von

1) Man muß dabei voraussetzen, daß $|n_1| (1 - q) \gg 1$, d. h. $|n_1| \cdot v \gg v_0$.

2) Eine Ausrechnung der Intensität unter Beibehaltung der universellen Konstanten findet sich in der folgenden Arbeit von A.-W. Maue. Vgl. auch unsere Gl. (4,5), in der bei der Integration nach α und β alle Integrale außer den in (3,4) aufgeführten wegfallen. In § 5 der erwähnten Arbeit von Hrn. Maue wird ferner gezeigt, daß (3,4) die wellenmechanische Bestätigung der in der Astrophysik viel verwendeten Kramerschen Formeln darstellt.

3) Sind die e/m -Werte beider Partikeln vergleichbar, so ist wie in der klassischen Theorie e/m zu ersetzen durch $\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}$. Dies hat zur Folge, daß bei der Bremsung von α -Strahlen an Atomkernen nur eine ganz geringe, beim Zusammenstoß von Partikeln mit gleicher spezifischer Ladung überhaupt keine Dipolstrahlung auftritt. Letzteres läßt sich leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß in diesem Fall der Ladungsschwerpunkt mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt, also nach dem Schwerpunktsatz keinerlei Beschleunigung erfährt. Durch eine etwaige Vergleichbarkeit der Massen wird die Größenordnung der Ausstrahlung dagegen nicht in dem Maße geändert.

den beiden am Zusammenstoß beteiligten Partikeln. G ist der in § 2 definierte Faktor (2,2); bei kleiner Anfangsgeschwindigkeit v ist G im Falle der Anziehung gleich 1, so daß J von v unabhängig wird, im Falle der Abstoßung aber gleich dem Ausdruck (2,21), so daß die Intensität mit wachsender Frequenz stark abfällt (Fig. 1). Wir geben hier nochmals das Gültigkeitsgebiet der Formel (3,7) an:

$$(3,51) \begin{cases} Z \geq 137 \frac{v_1}{c}, \\ v \geq \frac{v_g}{|n_1|} = \frac{m c v_1^2}{4 \pi Z e^2}, \end{cases}$$

letzteres mit Rücksicht auf Anm. 1 S. 144.

Bei der Bildung der Gesamtintensität

$$J = 2 \pi R^2 \int J_v \sin \Theta d\Theta dv$$

wollen wir mit Rücksicht darauf, daß sich die kleinen Frequenzen der Beobachtung entziehen, das Integral nach v statt von $v = 0$ von $v = a \cdot v_g$ bis $v = v_g$ erstrecken und im Hinblick auf (3,51) annehmen, daß $a \cdot |n_1| \geq 1$ sei. Wir erhalten dann im Falle der Anziehung:

$$\int_{a v_g}^{v_g} G dv = \int_{a v_g}^{v_g} dv = v_g (1 - a) = \frac{m v_1^2}{2h} (1 - a).$$

Bei Abstoßung führen wir $n = \frac{n_2}{n_1}$ als neue Integrationsvariable ein und erhalten:

$$v = v_g - \frac{m}{2h} v_2^2 = v_g \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad dv = \frac{2}{n^3} dn$$

$$\int_{a v_g}^{v_g} G dv = 2 v_g e^{2\pi |n_1|} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2\pi |n_1| n}}{n^3} \frac{dn}{\sqrt{1-a}}.$$

Bei großem $|n_1|$ wird der gesamte Wert des Integrals von der Umgebung der unteren Grenze geliefert und unser Integral wird daher

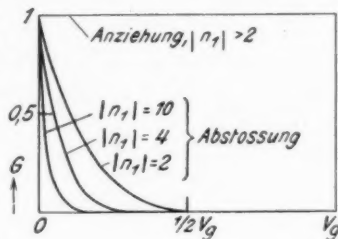


Fig. 1. Frequenzabhängigkeit des Faktors G , Gl. (2,2), der nach Gl. (3,5) die Form des Bremspektrums langsam bewegter Partikel bestimmt

$$\int_{a \nu_g}^{\nu_g} G d\nu = 2\nu_g e^{2\pi|n_1|} \int_1^{\infty} e^{-2\pi|n_1|n} (1-a)^{3/2} dn$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}$$

$$= \nu_g \frac{(1-a)^{3/2}}{\pi|n_1|} \exp\left(-2\pi|n_1| \frac{1-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}}\right).$$

Nach Ausführung der Integration nach Θ erhalten wir somit für die pro Sekunde ausgestrahlte Energie, soweit sie von größeren Frequenzen als $a \nu_g$ geliefert wird:

$$(3,6) \quad J = \frac{16\pi^2 Q}{3\sqrt{3}} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot \frac{m(Ze^2)^2}{h c^3} (1-a) \cdot G'.$$

G' ist bei Anziehung gleich 1, bei Abstoßung gleich

$$\frac{\sqrt{1-a}}{\pi|n_1|} \exp\left(-2\pi|n_1| \frac{1-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}}\right).$$

Aus (3,6) ersehen wir, daß sowohl die größere Masse wie das umgekehrte Vorzeichen der Ladung auf eine Verkleinerung der bei Protonen zu erwartenden Strahlungsintensität hinwirken. Dabei hängt die Intensität wesentlich davon ab, wie groß die kleinste Frequenz ist, die gerade noch mitbeobachtet wird. Unsere Formel ist mit den Messungen von Barton (a. a. O.) auch dann noch verträglich, wenn a sehr klein angenommen wird. Über das bei Beschießung eines Atoms mit Protonen zu erwartende *charakteristische Spektrum* sagen unsere Rechnungen natürlich nichts aus, da wir durchwegs mit dem nackten Kern gerechnet haben.

§ 4. Die Richtungsverteilung der gebremsten Elektronen ¹⁾

Bis jetzt war die Problemstellung folgende: Ein Elektron fliegt am Kern vorbei, wobei ein Lichtquant emittiert wird. Wir fragten nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Lichtquant mit bestimmter Polarisierung einem bestimmten Raumwinkelbereich $d\Omega$ und Frequenzbereich $d\nu$ angehört. Über die Flugrichtung des Elektrons wünschten wir nichts zu erfahren und mußten daher über alle Austrittsrichtungen mitteln. Wir wollen

1) Nach Abschluß der vorliegenden Untersuchungen kam mir eine Arbeit von N. F. Mott über das gleiche Problem in die Hand. Die Mott'sche Arbeit (Proc. Cambridge Phil. Soc. 27. S. 255. 1931) scheint mir das Wesen des Ausstrahlungsvorgangs klarer zum Ausdruck zu bringen. Sie erfordert aber andererseits einen komplizierteren mathematischen Apparat, so daß ich dieses Kapitel nicht unterdrücken möchte. — Wir werden der Einfachheit halber in diesem Paragraphen stets von Elektronen reden. Die Ergebnisse gelten sinngemäß auch für Protonen.

nun die Fragestellung dadurch verfeinern, daß wir nach der Wahrscheinlichkeit dafür fragen, daß aus demselben Elementarprozeß ein Lichtquant von vorgeschriebenen Eigenschaften und ein Elektron von bestimmter Flugrichtung hervorgehen. Die Energie des Elektrons ist dabei mit der Frequenz des Lichtquants durch die Einsteinsche Frequenzbedingung

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2$$

verknüpft. Haben wir dieses Problem gelöst, so ergibt sich einerseits die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Lichtquants bestimmter Art durch Summation über alle Austrittsrichtungen der Elektronen, andererseits die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Elektron von bestimmter Energie den Anziehungsbereich des Kernes in bestimmter Richtung verläßt, durch Summation über alle Austrittsrichtungen der Lichtquanten unter Berücksichtigung der beiden Polarisationsmöglichkeiten.

Wir charakterisieren die Flugrichtung des Lichtquants durch die Winkel Θ und Φ , bilden die elektrischen Momente in der Richtung wachsender Θ und wachsender Φ :

$$(4,1) \begin{cases} M_\Theta = -M_x \sin \Theta + M_y \cos \Theta \cos \Phi + M_z \cos \Theta \sin \Phi, \\ M_\Phi = -M_y \sin \Phi + M_z \cos \Phi, \end{cases}$$

und denken uns für M_x , M_y , M_z die Ausdrücke (3,2) eingesetzt. Ferner seien

$$(4,11) \quad d\omega = \sin \alpha d\alpha d\beta, \quad d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$$

die Größen der Raumwinkelbereiche, in denen die Austrittsrichtung des Elektrons bzw. Lichtquants gelegen sein soll.

Wir werden nun zeigen, daß, wie man ja wohl ohne weiteres vermuten möchte, die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch

$$C |M_\Theta|^2 d\omega d\Omega d\nu \quad \text{bzw.} \quad C |M_\Phi|^2 d\omega d\Omega d\nu$$

gegeben ist, je nachdem ob das Lichtquant in der Richtung wachsender Θ oder wachsender Φ polarisiert sein soll. C hängt dabei von v_1 und ν ab, nicht aber von den Richtungswinkeln α , β , Θ und Φ .

Wir bedienen uns dabei der nichtstationären Methode der Variation der Konstanten, wie sie Dirac in seiner Theorie der Lichtemission angegeben hat.¹⁾ Dabei wird sich von selbst eine Lösung der Schwierigkeiten ergeben, die der einlaufende

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. 114. S. 243 u. 710. 1927; vgl. auch G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 58. S. 348. 1929.

Bestandteil von ψ_2 für eine anschauliche Deutung des Bremsvorganges mit sich bringt.

Der Zustand unseres Systems Elektron plus Strahlungsfeld, zur Zeit $t = 0$, sei gegeben durch das Nichtvorhandensein von Strahlung und die Wellenfunktion des elastisch gestreuten Elektrons [Gl. (1)]:

$$u_1 = N(k_1) e^{i k_1 x} L_{n_1}(i k_1 \eta) e^{-i \omega(k_1) t},$$

$$\omega(k_1) = \frac{2\pi}{h} E_0 + \frac{h}{2\pi} \frac{k_1^2}{2m}.$$

E_0 ist die Ruhenergie des Elektrons, $N(k_1)$ der Normierungsfaktor aus A Note 10 (G).

Infolge der Wechselwirkung mit derjenigen Komponente der Hohlraumstrahlung, der das Lichtquant mit den vorgeschriebenen Eigenschaften angehören soll, kommt mit wachsender Zeit zu unserer Anfangslösung noch eine Wellenfunktion hinzu, die wir uns nach unserem $\psi(\alpha, \beta, k)$ aus Gl. (1,3) entwickelt denken können:

$$(4,2) \quad u_2 = \int a(\alpha, \beta, k, t) N(k) \psi(\alpha, \beta, k) \cdot e^{-i \omega(k) t} k^2 d\omega dk.$$

Für $a(\alpha, \beta, k, t)$ gilt dann nach Dirac, a. a. O. S. 718:

$$(4,21) \quad a = v(\alpha, \beta, k) \frac{1 - e^{-i[\omega(k_1) - \omega(k) - 2\pi\nu]t}}{\omega(k_1) - \omega(k) - 2\pi\nu} {}^1);$$

v wird in unserem Falle gleich

$$(4,22) \quad v = [\omega(k_1) - \omega(k)] \sqrt{\frac{2\pi\nu e^2}{h c^2}} \left\{ \frac{M_\theta}{M_\phi} \right\} N(k_1) N(k) (d\Omega d\nu)^{1/2}.$$

Dabei haben wir die bei Dirac auftretende Größe $\hat{x} (J'' J')$ in üblicher Weise durch die zeitliche Ableitung des Matrixelements $M \cdot \exp i[\omega(k_1) - \omega(k)]t$ ersetzt. Der Faktor $(d\Omega d\nu)^{1/2}$ gibt an, wie die Größe von a von dem Spielraum abhängt, den wir bei der Vorgebung der Eigenschaften des Lichtquants gelassen haben. Aus der Normierung der ψ folgt unmittelbar

$$\int |u_2|^2 dt = \int |a|^2 k^2 d\omega dk.$$

1) Im Falle stationärer Rechnung hätte man

$$a = \frac{v(\alpha, \beta, k)}{\omega(k_1) - \omega(k) - 2\pi\nu}$$

zu setzen und den Integrationsweg in der k -Ebene mit Rücksicht auf die Ausstrahlungsbedingung so zu führen, daß er, von Null ausgehend, die Nullstelle des Nenners zur Linken läßt. Im übrigen würde die Rechnung ganz analog verlaufen.

Dies ist die „Zahl“ der durch u_2 dargestellten Elektronen und damit auch die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Lichtquants von der vorgeschriebenen Art bis zum Ablauf der Zeit t ; $u_1 + u_2$ ist die dabei entstehende Wellenfunktion. Wir wollen zunächst u_2 genauer diskutieren.

Die in (4,2) vorgeschriebene Integration geht über den ganzen Bereich der Variablen, also über α von Null bis π , über β von Null bis 2π und über k von Null bis ∞ . Dabei ist in dem Integral über k die Stelle, an der der Nenner von (4,21) verschwindet, stark betont, so daß im Falle großer t und großer Abstände vom bremsenden Kern der ganze Wert des Integrals von der Umgebung dieser Stelle geliefert wird. An dieser Stelle, die wir mit k_2 bezeichnen wollen, ist aber

$$(4,23) \quad \omega(k_2) = \omega(k_1) - 2\pi\nu, \quad \text{d. h.} \quad \frac{m}{2} v_2^2 = \frac{m}{2} v_1^2 - h\nu,$$

wodurch die Gültigkeit des Energiesatzes gewährleistet wird.

Wir wollen jedoch die Integration nach k zunächst noch zurückstellen, bis wir die Integration nach $d\omega = \sin \alpha d\alpha d\beta$ ausgeführt haben. Dadurch umgehen wir die Schwierigkeiten, die die Ungültigkeit der asymptotischen Darstellung A (54) in der Umgebung der Richtung $\vartheta = \pi - \alpha$, $\varphi = \pi + \beta$ mit sich bringt. Denken wir uns in (4,21) und (4,2) die Größe v nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$(4,25) \quad v(\alpha, \beta, k) = \sum_{l, m} a_{l, m} P_l^m(\cos \alpha) e^{i m \beta},$$

so folgt durch Vergleich von (1,4) und (1,7):

$$\int v(\alpha, \beta, k) \psi(\alpha, \beta, k) d\omega = \sum_{l, m} a_{l, m} R(n, i k r) P_l^m(\cos \vartheta) e^{i m \varphi}.$$

Hieraus wird durch Einsetzen der asymptotischen Formel (c) aus Zusatz 1 und Benutzung von (4,25) und der Identität

$$(-1)^l P_l^m(x) = (-1)^m P_l^m(-x):$$

$$(4,26) \quad \left\{ \begin{aligned} \int v(\alpha, \beta, k) \psi(\alpha, \beta, k) d\omega &= \frac{2\pi i e^{-i \frac{\pi}{2} n}}{k r \Gamma(n+1)} \sum_{l, m} a_{l, m} \left\{ (2 k r)^{-n} e^{i k r} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^l \frac{\Gamma(-n+l+1)}{\Gamma(n+l+1)} (2 k r)^n e^{-i k r} \right\} P_l^m(\cos \vartheta) e^{i m \varphi} \\ &= \frac{2\pi i e^{-i \frac{\pi}{2} n}}{k r \Gamma(n+1)} \{ v(\vartheta, \varphi, k) \cdot (2 k r)^{-n} e^{i k r} \\ &\quad + w(\vartheta, \varphi, k) \cdot (2 k r)^n e^{-i k r} \}, \end{aligned} \right.$$

wobei $w(\vartheta, \varphi, k)$ lediglich den Charakter einer vorläufigen Abkürzung hat.

Nun haben wir noch die Integration nach k auszuführen. Indem wir aus (4,2), (4,21) und (4,26) die für große r und große t mit k schnell veränderlichen Faktoren in der Umgebung von $k = k_2$ entwickeln, erhalten wir

$$u_2 = \frac{4\pi^2 m}{i\hbar r} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}n_2}}{\Gamma(n_2+1)} N(k_2) e^{-i\omega(k_2)t} \cdot \left\{ \right\} \\ \left\{ \right\} = v(\vartheta, \varphi, k_2) \cdot (2k_2 r)^{-n_2} e^{ik_2 r} \int_0^\infty \frac{e^{i\left(r - \frac{\hbar k_2 t}{2\pi m}\right)(k-k_2)} - e^{i r(k-k_2)}}{k-k_2} dk \\ + w(\vartheta, \varphi, k_2) \cdot (2k_2 r)^{n_2} e^{-ik_2 r} \int_0^\infty \frac{e^{-i\left(r + \frac{\hbar k_2 t}{2\pi m}\right)(k-k_2)} - e^{-i r(k-k_2)}}{k-k_2} dk.$$

Die Integrale sind von H. Bethe ausgerechnet worden.¹⁾ Das erste ist gleich $-2\pi i$, wenn $2\pi m r < \hbar k_2 t$, andernfalls Null. Das zweite verschwindet für jeden positiven Wert von t .

Wir haben also folgendes Resultat: Die Wellenfunktion u_2 des durch Emission eines Lichtquants mit den vorgeschriebenen Eigenschaften gebremsten Elektrons ist:

$$(4,3) \quad \begin{cases} \text{Null, wenn } r > \frac{\hbar k_2}{2\pi m} t, \text{ d. h. } r > v_2 t, \\ -\frac{(2\pi)^4 m}{\hbar r} \frac{N(k_2)}{\Gamma(n_2+1)} (2ik_2 r)^{-n_2} e^{i(k_2 r - \omega(k_2)t)} \cdot v(\vartheta, \varphi, k_2), \\ \text{wenn } r < v_2 t. \end{cases}$$

Es tritt also nur eine *auslaufende* Welle auf und auch diese in der verwendeten Näherung nur in dem Gebiet, das das Elektron *klassisch schon erreicht haben kann*.²⁾ Ihre Richtungsabhängigkeit ist nach Gl. (4,22) in M_Θ bzw. M_Φ ent-

1) H. Bethe, Über die nichtstationäre Behandlung des Photoeffekts. Ann. d. Phys. [5] 4. S. 446. 1930.

2) Das analoge Resultat für das Lichtquant hätten wir erhalten, wenn wir (4,22) durch den äquivalenten Ausdruck

$$v = \int [\omega(k_1) - \omega(k)] \sqrt{\frac{2\pi \nu e^2}{\hbar c^3}} \left\{ \frac{M_\Theta}{M_\Phi} \right\} N(k_1) N(k) \psi'(\Theta, \Phi, \nu) d\Omega d\nu \\ \left(\psi' = \nu \cdot c^{-3/2} \exp \left\{ \frac{2\pi i \nu}{c} (r n) - 2\pi i \nu t \right\}, (r n) \text{ wie in A Fig. 10, ist die geeignete normierte ebene Welle als Wellenfunktion des Lichtquants} \right) \\ \text{ersetzt und die Integration nach } \nu \text{ bei festem } k \text{ ausgeführt hätten.}$$

halten, die ihrerseits durch Gl. (4,1) gegeben sind. M_x, M_y, M_z sind dabei aus (3,2) zu entnehmen.

Unserem u_2 entspricht ein radial gerichteter spezifischer Strom $e v_2 |u_2|^2$. Der durch eine in der Richtung $\vartheta = \alpha$, $\varphi = \beta$ gelegene Kugelfläche von der Größe $r^2 d\omega$ hindurchfließende Strom ist demnach $J_2 = e v_2 r^2 |u_2|^2 d\omega$, wobei in $|u_2|^2$ nunmehr $\vartheta = \alpha$, $\varphi = \beta$ zu setzen ist. Der einfallenden Welle entspricht nach A Note 10 im Unendlichen ein spezifischer

Strom $J_1 = e v_1 |u_1|^2 = \frac{e v_1}{(2\pi)^3}$. Das Verhältnis beider Ströme ist demnach:

$$(4,4) \quad \frac{W_\Theta}{W_\Phi} = \frac{J_2}{J_1} = (2\pi)^3 \frac{v_2}{v_1} r^2 |u_2|^2 d\omega = C \left\{ \frac{|M_\Theta|^2}{|M_\Phi|^2} \right\} d\omega d\Omega dv,$$

$$(4,41) \quad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{(2\pi)^{12} m^3 v^3 e^2 e^{-i\pi n_2}}{h^3 c^3 |\Gamma(n_2 + 1)|^2} N(k_2)^4 N(k_1)^2 \cdot \frac{v_2}{v_1} \\ &= \frac{(2\pi)^9 m^3 v^3 e^2}{h^3 c^3} N_1^2 N_2^2 \frac{v_2}{v_1}. \end{aligned} \right.$$

J_2/J_1 ist aber nach der statistischen Deutung der Wellenfunktion gerade die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem einfallenden Strom von ein Elektron pro Quadratcentimeter unter dem Einfluß der Störung ein Elektron pro Sekunde in den Winkelbereich $d\omega$ abgelenkt wird. Da die Störung bei unserer Rechnung in der Emission eines Lichtquants von der vorgeschriebenen Art bestand, sind also W_Θ bzw. W_Φ die Wahrscheinlichkeiten für folgenden Prozeß:

Eine (unendlich) große Anzahl von Elektronen fliegt an einem Kern vorbei und zwar kommt in großer Entfernung vor dem Kern gerade ein Elektron pro Quadratcentimeter. $W_\Theta d\Omega d\omega dv$ bzw. $W_\Phi d\Omega d\omega dv$ sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein in der Richtung wachsender Θ bzw. wachsender Φ polarisiertes Lichtquant emittiert wird, dessen Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ und dessen Fortschreitungsrichtung in dem Bereich $d\Omega$ um die Richtung Θ, Φ gelegen ist, und daß gleichzeitig, in ursächlichem Zusammenhang damit,

ein Elektron auf die Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2\hbar\nu}{m}}$ gebremst und in den Bereich $d\omega$ um die Richtung α, β abgelenkt wird. Damit haben wir die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung bewiesen.¹⁾

Unser Ergebnis wäre durch ein Experiment zu kontrollieren, bei dem Koinzidenzbeobachtungen zwischen austretenden Elek-

1) Gl. (18) bei N. F. Mott, a. a. O. läßt sich durch eine der Ableitung des Schwerpunktsatzes analoge Umformung auf (4,4) zurückführen.

tronen und Lichtquanten angestellt würden. Beobachtungen dieser Art liegen zur Zeit noch nicht vor. Wird nur die Ausstrahlung beobachtet, so hat man W nach $d\omega$ zu integrieren und erhält durch Addition der beiden verschieden polarisierten Komponenten und Multiplikation mit $h\nu$ den Ausdruck für $J_\nu d\Omega d\nu$:

$$(4,5) \quad J_\nu d\Omega d\nu = h\nu \cdot C d\Omega d\nu \int (|M_\theta|^2 + |M_\phi|^2) \sin \alpha d\alpha d\beta,$$

der mit dem Ausdruck, den man aus der Auffassung der Matricelemente als elektrische Momente erhält (vgl. Anm. 2, S. 144), übereinstimmt.

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß die Beobachtung der austretenden Elektronen unabhängig von der Beobachtung der Lichtquanten vorgenommen wird. Wir haben dann $(W_\theta + W_\phi)$ über $d\Omega$ zu integrieren und erhalten die Gesamtwahrscheinlichkeit für den Austritt eines Elektrons mit einer Energie zwischen $\frac{1}{2} m v_2^2$ und $\frac{1}{2} m v_2^2 + dE$ in den Raumwinkelbereich $d\omega$:

$$(4,6) \quad \left\{ \begin{aligned} W_E dE d\omega &= d\nu d\omega \int (W_\theta + W_\phi) d\Omega \\ &= \frac{1}{h} dE d\omega \int (W_\theta + W_\phi) d\Omega \\ &= \frac{4\pi C}{3h} (|M_x|^2 + |M_y|^2 + |M_z|^2) dE d\omega. \end{aligned} \right.$$

Zur Diskussion dieser Formel nehmen wir zunächst an, v_1 sei groß gegen $cZ/137$, so daß wir n_1^2 , $n_1 n_2$ und n_2^2 gegen 1 streichen können. Dann dürfen wir in (3,2) außer in B überall n_1 und n_2 gleich Null setzen, da sie als einzige imaginäre Größen im Absolutwert erst quadratisch oder miteinander multipliziert vorkommen. So erhalten wir, vgl. A S. 298,

$$(4,61) \quad \left\{ \begin{aligned} W_E &= \frac{4\pi |B|^2 C}{3h} \left\{ \frac{(k_1 - k_2 \cos \alpha)^2}{\left(1 + \frac{4k_1 k_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(k_1 - k_2)^2}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^2 \sin^2 \alpha}{\left(1 + \frac{4k_1 k_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(k_1 - k_2)^2}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{8e^2}{3c^3 m^2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{n_1^4}{(e^{2\pi i n_1} - 1)(1 - e^{-2\pi i n_2})} \\ &\quad \cdot \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}. \end{aligned} \right.$$

Wir ersehen daraus, daß die Richtungsverteilung der gebremsten schnellen Elektronen sich um so mehr der Kugelsymmetrie nähert, je mehr Energie das Elektron verloren hat, während die Elektronen mit verschwindendem Energieverlust praktisch alle in der Einfallrichtung weiterfliegen. In Fig. 2 werden wir diesen Sachverhalt veranschaulichen.

Gl. (4,61) ist eine um so bessere Näherung, je kleiner α ist. Im Grenzfall $\alpha = 0$, $v \neq 0$ gilt sie für beliebige n_1 und n_2 , da dann die hypergeometrischen Funktionen in (3,2) den Wert 1 annehmen.

Eine weitere Möglichkeit, Gl. (4,5) in einfachere Gestalt zu bringen, besteht darin, daß man $v_2 \rightarrow 0$ und damit $|n_2| \rightarrow \infty$ gehen läßt. Wir befinden uns dann an der kurzwelligen Grenze des Spektrums, und unsere Matrixelemente nehmen infolge der Entartung der hypergeometrischen Funktionen¹⁾ die Form von A (83) an. (Man beachte die Vertauschung von α mit $\pi - \alpha$.) Die Kurven für $v_2 \rightarrow 0$ in Fig. 2 sind auf diesem Wege gewonnen.

Im Falle langsam bewegter Partikel, $|n_1| \gg 1$, ist, falls $v \cdot |n_1| \gg v_g$ und $0 < \alpha < \pi$, Gl. (e) aus Zusatz 2 zu verwenden. Wie in Zusatz 2 hervorgehoben, nimmt dieser Ausdruck mit wachsendem α sehr stark zu, so daß bei nicht zu kleinen Frequenzen die Ausstrahlung in der Hauptsache von stark abgelenkten Elektronen herrührt. Für α in der Nähe von π ist Gl. (3,3) anwendbar. Sie gibt für $\alpha = \pi$ den Wert

$$W_E = \frac{4\pi C}{3\hbar} \left| \frac{B e^{i n_1 \pi}}{\Gamma(1/2)} \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{12 n_1^2 (k_1 + k_2)}} \right|^2.$$

In Zusatz 3 werden wir weiterhin nachrechnen, daß W_E im Grenzfall $v \rightarrow 0$, $\alpha \neq 0$ die Form annimmt

$$W_E = \frac{2 Z^2 e^6}{3 c^3 m^3 \hbar^2 v_1^2} \cdot \frac{1}{v \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

1) Vgl. A S. 273, Anm. 1 oder die allgemeineren Formeln bei W. Gordon, Ann. d. Phys. [5] 2, S. 1031, Gl. (2) und (2').

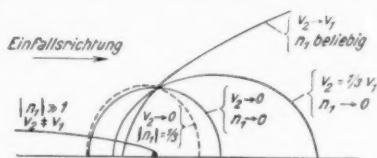


Fig. 2. Richtungsverteilung der gebremsten Elektronen: bei sehr kleinen $|n_1|$ Ellipsen mit der Exzentrizität $\frac{2v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$ Gl. (4,61), bei großen $|n_1|$ verlassen fast alle Elektronen, die wesentlich mehr als $1/|n_1|$ ihrer Energie verloren haben, den Kern in der Richtung $\alpha \approx \pi$

Dort werden wir uns auch mit der von Mott aufgeworfenen Frage beschäftigen, ob die Rechnungen in diesem Grenzfalle noch gültig sind.

Schließlich ist noch die Frage zu beantworten, was aus unseren Formeln wird, wenn man die Retardierung berücksichtigt. Wir können uns dabei auf den Fall großer Anfangsgeschwindigkeiten beschränken, da ja der Einfluß der Retardierung, vgl. A §§ 13 und 14, mit $\beta = \frac{v_1}{c}$ gegen Null geht. Außer bei ganz schweren Atomen sind große Anfangsgeschwindigkeiten aber gleichbedeutend mit kleinen Werten von $|n|$. Um den Einfluß der Retardierung zu berücksichtigen, haben wir, abgesehen von winkelunabhängigen Faktoren, die Matricelemente durch die entsprechenden Vektorpotentiale aus A § 14 zu ersetzen. In diesen kommt jedoch β nur in der Form $\beta \cos \Theta$ vor, und zwar so, daß es bei der Integration nach $d\Omega$ in Gl. (4,6) herausfällt. (Glieder in β^2 sind bei unserer unrelativistischen Rechnung zu streichen.) Bei nicht zu schweren Atomen ist also die Retardierung in unrelativistischer Näherung ohne Einfluß auf die Richtungsverteilung der Elektronen.

Zusätze

1. Wir schreiben (1,8) mit der Abkürzung $q = 2ikr$:

$$R\left(n, \frac{q}{2}\right) = \sqrt{2\pi} i^{-1} \int (y + \frac{1}{2})^{-n} (y - \frac{1}{2})^{n-1} e^{\frac{q}{2}(y - \frac{1}{2})} \\ \cdot \frac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(-i\frac{q}{2}(y + \frac{1}{2})\right)}{\sqrt{-i\frac{q}{2}(y + \frac{1}{2})}} dy$$

und ersetzen die Besselfunktion durch ein Integral¹⁾:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(z) = \frac{\Gamma(l+1)}{\sqrt{\pi} (2z)^{l+\frac{1}{2}}} e^{-i(l+1)\pi} \frac{1}{2\pi} \int e^{2iz u} (u^2 - \frac{1}{4})^{-l-1} du.$$

Der Integrationsweg kommt aus dem Unendlichen, umläuft die Punkte $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ in positivem Sinn und geht ins Unendliche zurück, und zwar so, daß das Integral konvergiert. Im Falle ganzer $l \geq 0$ heben sich die ins Unendliche verlaufenden Teile auf und wir erhalten einen geschlossenen Weg. Der Bestimmtheit halber wollen wir festsetzen, daß längs dieses Weges $|u| = 1$ sei, während für den Weg in der y -Ebene etwa $|y| = 4$ gewählt werden möge. Wir dürfen dann nach Vertauschung der Integrationsfolge und Einführung der neuen Variablen

$$x = -q(y + \frac{1}{2})(u + \frac{1}{2})$$

1) Vgl. etwa G. N. Watson, *Bessel Functions*. 1922, § 6,1, Gl. (2).
 $\nu = -l - \frac{1}{2}$, $t = 2u$.

sicher sein, daß in dem dadurch entstehenden Integral

$$R\left(n, \frac{\varrho}{2}\right) = \frac{l!}{\pi} (-1)^l e^{-\frac{\varrho}{2}} \int (u - \frac{1}{2})^{-l-1} du \\ \cdot \int (x + \varrho(u + \frac{1}{2}))^{n-1} x^{-n-l-1} e^{-x} dx$$

der Integrationsweg in der x -Ebene um die beiden Verzweigungspunkte herumführt, während in der u -Ebene nur noch die eine Singularität $u = \frac{1}{2}$ innerhalb des Integrationsweges gelegen ist. Durch Residuenbildung an dieser Stelle erhalten wir schließlich

$$(a) \quad \begin{cases} R\left(n, \frac{\varrho}{2}\right) = -4\pi i^l \frac{\Gamma(-n+l+1)}{\Gamma(-n+1)} R_0 \\ R_0 = e^{-\frac{\varrho}{2}} (-i\varrho)^l \frac{1}{2\pi i} \int (x+\varrho)^{n-l-1} x^{-n-l-1} e^{-x} dx. \end{cases}$$

R_0 ist nun tatsächlich der Radialteil der polaren Eigenfunktion in der Form, wie er in der Arbeit von Sommerfeld und Schur über den Photoeffekt verwendet wurde.¹⁾

Von dort entnehmen wir zunächst, daß R_0 für rein imaginäre n und ϱ reell ist, also

$$(b) \quad \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+l+1)} R\left(n, \frac{\varrho}{2}\right) = (-1) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+l+1)} R\left(-n, -\frac{\varrho}{2}\right)$$

(zum Beweise ersetze man in $R\left(-n, -\frac{\varrho}{2}\right)$ die Integrationsvariable x durch $x' + \varrho$), ferner die asymptotische Entwicklung [Gl. (29) und (31) dortselbst], deren erstes Glied lautet

$$(c) \quad \left\{ R\left(n, \frac{\varrho}{2}\right) = \frac{2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}n}}{i k r \Gamma(-n+1)} \left\{ (2kr)^{-n} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)} \right. \right. \\ \left. \left. - (2kr)^n \frac{\Gamma(-n+l+1)}{\Gamma(n+l+1)} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)} \right\} \right\}.$$

Binomialentwicklung nach ϱ unter dem Integralzeichen in Gl. (a) liefert ähnlich wie in A auf S. 272 unten:

$$(d) \quad \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+l+1)} R\left(n, \frac{\varrho}{2}\right) = \frac{4\pi}{(2l+1)!} \varrho^l e^{-\frac{\varrho}{2}} F(-n+l+1, 2l+2, \varrho),$$

wobei F die entartete hypergeometrische Funktion

$$(e) \quad F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

bedeutet.

2. Der mathematische Formalismus des Grenzüberganges $|n_1| \rightarrow \infty$ in den Ausdrücken (3,2) schließt sich engstens an A Note 8 an, so daß wir ihn hier nur zu skizzieren brauchen. Eine zu A (45) analoge Darstellung der hypergeometrischen Funktionen in A (97) könnte man da-

1) A. Sommerfeld u. G. Schur, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 409. 1930. Gl. (21).

durch erhalten, daß man in A (92), anstatt die Integration nach v gliedweise auszuführen, für L die Darstellung A (45) einsetzt und die Integrationsfolge vertauscht. Wir geben hier gleich allgemein an¹⁾:

$$(a) \quad \left(\frac{\alpha-1}{\gamma-1}\right) F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{2\pi i} \int (y + 1/2)^{\alpha-1} (y - 1/2)^{\gamma-\alpha-1} \cdot (1 - x(y + 1/2))^{-\beta} dy.$$

Der Integrationsweg umläuft die Punkte $\pm 1/2$ in positivem Sinn. Zum Beweise entwickle man nach x und bilde die Residuen im Unendlichen. Man erhält dann für F die Reihe A (93b).

Führen wir nun noch, um engeren Anschluß an A Note 8 zu erreichen, die Größe

$$\alpha' = \pi - \alpha$$

ein, so lassen sich die Matrixelemente (3,2) in der Form schreiben:

$$(b) \quad M = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(y) e^{n f(y)} dy; \quad f(y) = i \log \frac{(y - 1/2)^{\alpha'} (1 - x(y + 1/2))}{(y + 1/2)^{\alpha'}}$$

$$(c) \quad n = |n_2|, \quad q = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_2}{k_1}; \quad x = \frac{-4q \sin^2 \frac{\alpha'}{2}}{(1-q)^2}.$$

Die $\varphi(y)$ sind bei M_x und M_y verschieden, und zwar gilt

$$(d) \quad \begin{cases} \varphi(y) = -B \left\{ \frac{k_1 + k_2 \cos \alpha}{(y - 1/2) [1 - x(y + 1/2)]} + \frac{2k_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - x(y + 1/2)} \right\} & \text{bei } M_x, \\ \varphi(y) = B \sin \alpha \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \frac{k_1 \left(1 + \frac{q}{n_1}\right)}{[1 - x(y + 1/2)]^2} & \text{bei } M_y. \end{cases}$$

Wie in A verschwindet mit wachsendem $q \cdot n$ der Integrand in der positiv imaginären Halbebene. Der in der negativ imaginären Halbebene gelegene Sattelpunkt ergibt sich zu

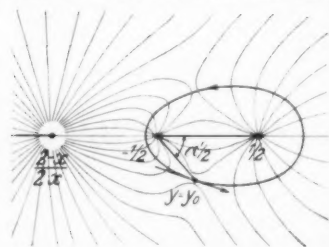


Fig. 3. Integrationsweg in der y -Ebene. Die dünn gezeichneten Linien geben den qualitativen Verlauf der Kurven wieder, auf denen der Absolutwert des Integranden im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ konstant ist [Gl. (b)]

$$y_0 = -\frac{q}{2} - \frac{i}{2} (1-q) \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}$$

(vgl. Fig. 3). $q = 0$ entspricht dem in A Note 8 behandelten Spezialfall der kurzwelligen Grenze. Nähert sich q dem Wert eins, so rücken die Sattelpunkte in den linken Verzweigungspunkt hinein. Um diesen Fall auszuschließen, wollen wir $q < 1$ voraussetzen, oder, was dasselbe ist, $k_2 < k_1$.

Im Gegensatz zu A ist nun $f''(y_0)$ nicht mehr reell. Wir setzen daher

$$f''(y_0) = -2a^2 e^{2i\delta}$$

1) Vgl. auch W. Gordon, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 1032. 1930, das Integral nach s . Unsere Darstellung gilt nur für positiv ganze γ .

mit reellem a . Die Entwicklung im Sattelpunkte lautet dementsprechend

$$f(y) = f(y_0) - a^2 e^{2i\delta} (y - y_0)^2$$

und wir haben unseren Integrationsweg nicht mehr von $y - s$ bis $y + s$ zu führen, sondern von $y - s e^{-i\delta}$ nach $y + s e^{-i\delta}$. s muß dabei so klein gewählt werden, daß man die höheren Ableitungen gegen die zweite vernachlässigen kann, also bei nicht verschwindendem $f''(y_0)$:

$$|f'''(y_0)| \frac{s^3}{3!} \ll |f''(y_0)| \frac{s^2}{2}, \quad \text{d. h. } s \ll \left| \frac{3 f'''(y_0)}{f''(y_0)} \right|.$$

Aus (b) wird nun

$$(c) \quad \begin{cases} M = \varphi(y_0) e^{n f(y_0)} \int_{y_0 - s e^{-i\delta}}^{y_0 + s e^{-i\delta}} \exp. \{ -n a^2 e^{2i\delta} (y - y_0)^2 \} dy \\ = \varphi(y_0) e^{n f(y_0)} \sqrt{\frac{-\pi}{n f''(y_0)}}, \quad \text{falls } s a \sqrt{n} \gg 1. \end{cases}$$

Die Bedingung für die Gültigkeit von (c) lautet somit:

$$(f) \quad \frac{1}{a \sqrt{n}} \ll s \ll \left| \frac{3 f'''(y_0)}{f''(y_0)} \right|, \quad \text{d. h. } |f''(y_0)|^{3/2} \sqrt{n} \gg |f'''(y_0)|.$$

Auf dem von den beiden Verzweigungspunkten $y = \pm \frac{1}{2}$ eingeschlossenen Stück der reellen Achse ist $|e^{f(y)}|$ gleich $e^{\pi e}$. Im Sattelpunkte ist es somit, da ja der über den Sattelpunkt führende Integrationsweg der Weg ist, auf dem $|e^{f(y)}|$ am kleinsten bleibt, stets kleiner als $e^{\pi e}$, es sei denn, daß der Sattelpunkt in unmittelbarer Nähe der reellen Achse gelegen ist. Letzteres ist nur für kleine α' der Fall, und wir schließen daraus, ohne auf den komplizierten Ausdruck für $f(y_0)$ eingehen zu müssen, daß $\exp \{n f(y_0)\}$ und somit auch M für kleine α' den größten Absolutwert annimmt. Für kleine α' wird nun aber, wie man leicht nachrechnet,

$$f''(y_0) = \frac{-8 \alpha' e}{(1 + q)(1 - q^2)}, \quad \text{also } |f''(y_0)| \ll 1,$$

entgegen unserer Forderung (f). Wir müssen deshalb bei der näherungsweise Berechnung von (b) einen Schritt weiter gehen.

Da die dritte Ableitung $f'''(y_0)$ in dem Intervall $0 \leq \alpha' < \pi$ nirgends verschwindet, erhalten wir einen im ganzen Intervall gültigen Grenzwert durch den Ansatz

$$f(y) = f(y_0) + \frac{1}{2} f''(y_0) (y - y_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(y_0) (y - y_0)^3.$$

Nach (d) kann $\varphi(y_0)$ ebenfalls Null werden, so daß wir auch $\varphi(y)$ entwickeln müssen:

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0) (y - y_0).$$

Damit entsteht aus (b):

$$(g) \quad \begin{cases} M = \varphi(y_0) e^{n f(y_0)} K_1 + \varphi'(y_0) e^{n f(y_0)} K_2, \\ K_1 = \int e^{\frac{n}{2} f''(y_0) (y - y_0)^2 + \frac{n}{6} f'''(y_0) (y - y_0)^3} dy, \\ K_2 = \int e^{\frac{n}{2} f''(y_0) (y - y_0)^2 + \frac{n}{6} f'''(y_0) (y - y_0)^3} (y - y_0) dy. \end{cases}$$

K_1 und K_2 sind dieselben Integrale wie in A Note 8 (J) und wir können sie wie dort in der Form ansetzen

$$K_1 = c \cdot e^r \left[A H_{1/2}^{(1)}(s) + B H_{1/2}^{(2)}(s) \right],$$

$$K_2 = \frac{c}{2} K_1 + c^2 e^r \left[C H_{3/2}^{(1)}(s) + D H_{3/2}^{(2)}(s) \right],$$

$$(h) \quad c = -2 \frac{f''(y_0)}{f'''(y_0)}, \quad s = \frac{i n}{r} \frac{(f''(y_0))^3}{(f'''(y_0))^2} = i r.$$

Die Koeffizienten A, B, C, D bestimmen sich aus der Forderung, daß im Falle der Gültigkeit von (f) die Ausdrücke (g) und (e) identisch sein müssen. In diesem Falle ist $|s| \gg 1$ und man erhält genau wie in A, indem man die Hankelfunktionen durch ihre asymptotischen Darstellungen ersetzt:

$$A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad B = 0, \quad C = \frac{-\pi}{4\sqrt{3}} e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad D = 0,$$

und damit aus (g):

$$(i) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{n f(y_0) - i s} \left[\varphi(y_0) \frac{f''(y_0)}{f'''(y_0)} - \varphi'(y_0) \left(\frac{f''(y_0)}{f'''(y_0)} \right)^2 \right] \\ &\quad \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} H_{1/2}^{(1)}(s) + \varphi'(y_0) \left(\frac{f''(y_0)}{f'''(y_0)} \right)^2 e^{\frac{5\pi i}{6}} H_{3/2}^{(1)}(s) \end{aligned} \right\}.$$

Dies ist also der Grenzwert der Matrixelemente für große Werte von $|n_1|$. Wie wir schon gesehen haben, ist wie in A die Stelle $\alpha' = 0$ stark betont. Für kleine α' gilt aber nach (c) und (h):

$$\Re \{ f(y_0) \} = \pi q - \frac{q \alpha'^3}{6} \frac{1-q}{(1+q)^2}; \quad f''(y_0) = \frac{-8 q \alpha'}{(1+q)(1-q^2)},$$

$$f'''(y_0) = -\frac{32 i q}{(1-q^2)^2}; \quad s = \frac{i q n \alpha'^3}{6} \frac{1-q}{(1+q)^2},$$

und ferner nach (d):

$$\varphi(y_0) = -i k_1 B \alpha' \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2, \quad \varphi'(y_0) = 4 k_1 B \frac{1-q}{(1+q)^2} \text{ bei } M_s,$$

$$\varphi(y_0) = k_1 B \begin{cases} \cos \beta \\ \sin \beta \end{cases} \alpha' \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2 \text{ bei } \begin{cases} M_y \\ M_z \end{cases}.$$

Bei M_y ist $\varphi'(y_0)$ unwesentlich, weil $\varphi(y_0)$ nicht verschwindet. (Der Faktor $(1-q)^2$ steht in B im Nenner.)

Durch Zusammenfassung und Übergang zu den Absolutwerten entstehen daraus die Formeln (3,3), die wir in § 3 benutzt haben.

3. Wir werden hier die Ausdrücke $|M_x^2|$ und $|M_z^2|$, Gl. (3,2), im Grenzfall $r \rightarrow 0$, d. h. $k_2 \rightarrow k_1$, genauer untersuchen. Das Argument der hypergeometrischen Funktionen geht dabei gegen $-\infty$. Mit Hilfe der Umrechnungsformeln für hypergeometrische Funktionen¹⁾ bestätigt man leicht, daß im Falle $n_1 = n_1 \left(1 + \frac{1}{k_2} \cdot s \right)$ gilt:

1) Whittaker-Watson, *Modern Analysis*, 4. Aufl., § 14, 51. Die Endformel enthält Vorzeichenfehler.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} F\left(1 + n_1, 1 + n_2, 1, -\frac{s}{\varepsilon}\right) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| F\left(1 + n_1, 1 + n_2, 1, -\frac{s}{\varepsilon}\right) + n_1 F\left(1 + n_1, 1 + n_2, 2, -\frac{s}{\varepsilon}\right) \right| = \frac{1}{s |F(n_1 + 1)|^2};$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| F\left(1 + n_1, 2 + n_2, 2, -\frac{s}{\varepsilon}\right) \right| = \frac{1}{s |1 + n_1| \cdot |F(1 + n_1)|^2}.$$

Wenden wir dies auf (3,2) an, indem wir setzen:

$$s = k_1 - k_2; \quad s = 4 k_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad k_1 - k_2 \cos \alpha = 2 k_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \cos \alpha,$$

so erhalten wir:

$$|M_x|^2 = \frac{64 \pi^2 |n_1|^2 e^{-2 \pi i n_1}}{(k_1^2 - k_2^2)^4 |F(n_1 + 1)|^4},$$

$$|M_y|^2 + |M_z|^2 = \frac{16 \pi^2 |n_1|^2 e^{-2 \pi i n_1}}{(k_1^2 - k_2^2)^4 |F(n_1 + 1)|^4} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

Setzen wir dies in (4,6) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (4,41) und A Note 10 (F) und (G):

$$W_E = \frac{Z^2 e^6}{6 \pi^2 c^3 m^2 h^2 v_1^2} \cdot \frac{1}{v \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob angesichts der Tatsache, daß W_E für kleine v und für kleine α unendlich wird, unsere Rechenmethoden noch aufrecht erhalten werden können. Dabei kommt es darauf an, ob das Unendlichwerden bereits dann eintritt, wenn ein einzelnes Elektron an einem Kern vorbeifliegt, oder ob es seinen Grund darin hat, daß die unendlich vielen Elektronen, die wir in sehr großem Abstand an unserem Kern vorbeischießen, in ihrer Gesamtheit einen unendlichen Beitrag liefern. Letzteres scheint in der Tat der Fall zu sein. Denn wenn man das einfallende Elektron durch ein Wellenpaket darstellt und für die ausfallende Welle das Eigendifferential verwendet, so existieren die dem Vektorpotential, also unserem

$$[\omega(k_1) - \omega(k)] \begin{Bmatrix} M_\Theta \\ M_\Phi \end{Bmatrix} \quad \text{in (4,22)}$$

entsprechenden Integrale und u_s in (4,2) bleibt stets endlich. Wir möchten daher entgegen der Ansicht von Mott unsere Rechenmethode auch im Grenzfall $v \rightarrow 0$ für korrekt halten.

Erweiterung für beliebig schnelle Elektronen

Die Versuche von Kulenkampff, bei denen $\beta = \frac{v_1}{c}$ in der Gegend von $\frac{1}{3}$ gelegen ist, lassen eine relativistische Behandlung des Problems wünschenswert erscheinen. Mit Rücksicht auf die Beschränktheit des Raumes seien die Ergebnisse der bisherigen Rechnungen hier ohne Beweis mitgeteilt. Unter der Annahme $Z \ll 137 \beta$ erhält man für die auf Frequenz- und Raumwinkelbereich bezogene ausgestrahlte Intensität

in der Nähe der kurzwelligen Grenze bei einem einfallenden Strom von ein Elektron pro Sekunde und Quadratcentimeter:

$$J_v = \frac{\alpha^4 Z^4 e^3 h^2 c}{(E - E_0)^2 (e^{2\pi\alpha Z/\beta} - 1)} \cdot f(\Theta, \varphi);$$

$$f(\Theta, \varphi) = \sin^2 \Theta \left[\frac{2(1 - \beta^2)^{3/2} \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} + \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) [1 - (1 + 2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \beta^2}]}{2(1 - \beta \cos \Theta)^3} + \text{Glieder von } \frac{\alpha^2 Z^2}{\beta^2} \right].$$

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \sim \frac{1}{137}, \quad E_0 = m_0 c^2, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Θ ist dabei der Winkel zwischen der Einfallrichtung des Elektrons und der Beobachtungsrichtung, φ der Winkel zwischen der Senkrechten auf den genannten Richtungen und der Schwingungsrichtung des elektrischen Lichtvektors. Die Gesamtausstrahlung in bestimmter Richtung entsteht daraus durch Addition zweier senkrecht zueinander polarisierten Komponenten, also etwa als $(J_v)_{\varphi=0} + (J_v)_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$. Man erhält so für die Vor-

eilung des Intensitätsmaximums in Abhängigkeit von β fast dieselbe Kurve wie bei unrelativistischer Rechnung [die Abweichungen gegen Gl. (108) in A § 13 sind von der Ordnung β^2].

Die Rechnungen lassen sich leicht auf den Photoeffekt übertragen und führen zu dem Ergebnis, daß bei harter anregender Strahlung die Photoemission aus s -Zuständen allein maßgebend ist. Der Photostrom, den eine Lichtwelle mit der Energiedichte I hervorruft, wenn ein s -Elektron mit der Hauptquantenzahl n vorhanden ist, wird gleich:

$$\frac{\alpha^6 Z^6 e^3 h \beta^3 c^2 E^2 E_0}{n^3 (E - E_0)^3 (e^{2\pi\alpha Z/\beta} - 1)} \cdot f(\Theta, \varphi),$$

bei ganz entsprechender Bedeutung von Θ und φ . An Stelle der Geschwindigkeit und Flugrichtung des einfallenden Elektrons sind nunmehr die entsprechenden Größen für das auslaufende Elektron zu nehmen. Setzt man $n = 1$ und streicht man $2\pi\alpha Z/\beta$ gegen 1, so erreicht man Übereinstimmung mit den kürzlich von F. Sauter¹⁾ abgeleiteten Formeln.

Zum Schlusse sei mir gestattet, meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. A. Sommerfeld, für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein förderndes Interesse an ihrer Durchführung meinen tiefsten Dank auszusprechen.

1) F. Sauter, *Ann. d. Phys.* [5] **11**. S. 454. 1931.

(Eingegangen 21. Dezember 1931)

Das kontinuierliche und kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum

*nach der Theorie von Kramers und nach der
Wellenmechanik¹⁾*

Von A.-W. Maue

(Mit 8 Figuren)

Übersicht: Im I. Teil werden die nötigen Intensitätsformeln zusammengestellt, und zwar in § 2 die nach der Wellenmechanik und § 4 die nach der Theorie von Kramers erhaltenen. § 3 geht auf das Grenzgebiet der beiden Spektren, des kontinuierlichen und des kontinuierlich-diskreten, ein. Im II. Teil werden die Ergebnisse beider Theorien für Intensität und Polarisation der Strahlung verglichen: § 5 behandelt den speziellen Fall langsamer Elektronen, § 6 den Fall schneller Elektronen und § 7 das langwellige Randgebiet des kontinuierlichen Spektrums. § 8 bringt einige graphische Darstellungen. In § 9 wird auf eine korrespondenzmäßige Theorie von Wentzel eingegangen. In § 10 wird eine astrophysikalische Anwendung der Kramersschen Theorie besprochen.

§ 1. Einleitung

In einer kürzlich erschienenen Arbeit²⁾ behandelt A. Sommerfeld die Bremsung eines Elektrons im Coulombfeld nach der Wellenmechanik und untersucht die hierbei ausgesandte kontinuierliche Strahlung. Vor Begründung der Wellenmechanik behandelte Kramers³⁾ dasselbe Problem. Er berechnete unter Anwendung korrespondenzmäßiger Überlegungen die Intensität von kontinuierlicher und diskreter Strahlung. Da die korrespondenzmäßigen Rechnungen im wesentlichen klassisch sind, werden wir sie mitunter einfach als „klassisch“ bezeichnen. In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit die Ergebnisse der Kramersschen Theorie durch die Wellenmechanik bestätigt werden und wo und in welcher Richtung sie abzuändern sind. Die wellenmechanischen Formeln für die diskrete Strahlung werden wir einer Arbeit von W. Gordon (vgl. § 2) entnehmen.

1) Gekürzte Münchener Dissertation.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [5] **11**. S. 257. 1931. Hinweise auf diese Arbeit sind im folgenden mit A bezeichnet.

3) H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**. S. 836. 1923, im folgenden als B zitiert.

Die wellenmechanische Behandlung des Problems ist verschiedentlich durchgeführt worden. Die Literaturangaben, die sich in der erwähnten Arbeit von A. Sommerfeld finden, seien noch durch die Angabe zweier Arbeiten von I. A. Gaunt¹⁾ ergänzt.

Die Ergebnisse des Vergleichs, den wir im folgenden für die Emissionsspektren durchführen, gelten natürlich in gleicher Weise für die Absorptionsspektren.

1. Zusammenstellung der notwendigen Formeln

§ 2. Berechnung der Intensität der ausgesandten Strahlung

Zur Berechnung der Intensität der ausgesandten Strahlung benutzen wir die Koordinaten-Matrixelemente

$$M_q = \int q \psi_1 \psi_2^* d\tau.$$

Hier bedeutet q die Koordinate, ψ_1 ist die Eigenfunktion des Anfangs-, ψ_2 die des Endzustandes. ψ_1 gehört immer dem kontinuierlichen Spektrum an, ψ_2 kann auch dem diskreten Spektrum angehören. ψ_1 ist immer dieselbe Eigenfunktion, die in großem Abstand vom Kern ein in der Richtung der x -Achse einfallendes Elektron darstellt. Die Matrixelemente für die rein kontinuierlichen Übergänge entnehmen wir aus A (97), die für die kontinuierlich-diskreten Übergänge, im folgenden kurz als „diskret“ bezeichnet, aus einer Arbeit von Gordon.²⁾ In beiden Fällen haben wir für unseren Zweck einige Umformungen vorgenommen. Im ersten Falle sind es dieselben, die in A § 11 angegeben sind, für den zweiten Fall sollen sie in Note 2 des Anhangs angedeutet werden. Gehen wir sofort zum Quadrat des Absolutbetrages über, so erhalten wir für das kontinuierliche Spektrum:

$$(1) \quad \begin{cases} |M_x|^2 = |C|^2 \cdot \left[(n_1 \cos \alpha - n_2) F(1 - n_1, 1 + n_2, 1, x) \right. \\ \quad \left. + 2 n_1 n_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} F(1 - n_1, 1 + n_2, 2, x) \right]^2, \\ |M_z|^2 = |C|^2 \cdot \sin^2 \beta \sin^2 \alpha \left[n_1 (1 + n_2) \right. \\ \quad \left. \cdot F(1 - n_1, 2 + n_2, 2, x) \right]^2, \\ x = \frac{4 k_1 k_2}{k'^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

und für das diskrete Spektrum

1) I. A. Gaunt, Phil. Trans. Roy. Soc. A **229**. S. 163. 1930; Proc. Roy. Soc. A **126**. S. 654. 1930.

2) W. Gordon, Ann. d. Phys. [5] **2**. S. 1031. 1929.

$$(2) \quad \begin{cases} |M_x|^2 = |C|^2 \cdot \left[(n_1 + n_2) F(-\lambda_2, n_1, 1, x) \right. \\ \quad \left. + 2 \frac{k}{k'} F'(-\lambda_2, n_1, 1, x) \right]^2, \\ |M_x|^2 = |C|^2 \cdot \frac{1}{k_2^2} \cdot \frac{1}{(\lambda_2 + 1)^2} |F'(-\lambda_2 - 1, n_1, 1, x)|^2, \\ x = \frac{4k_1 k_2}{k'^2} \quad \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = n_2 & \text{bei } M_x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2 = n_2 & \text{bei } M_x \end{matrix} \end{cases}$$

Die hier benutzten Abkürzungen sind, in einer gleichzeitig für (1) und (2) gültigen Form geschrieben:

$$(3) \quad \begin{cases} C = \frac{16\pi k_1 k_2}{k^2 k'^4} \left(-\frac{k}{k'} \right)^{n_1}, & 0 \leq \arg \left(-\frac{k}{k'} \right) \leq \pi, \\ k' = k_1 + k_2, & k = k_1 - k_2. \end{cases}$$

$$(4) \quad n_{1,2} = \frac{Z}{a k_{1,2}}.$$

$$(5) \quad k_{1,2}^2 = -\frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} E_{1,2}.$$

E_1 und E_2 sind Anfangs- und Endenergie des Elektrons, a ist der Wasserstoffradius. (4) und (5) sind so gewählt, daß für $E_2 < 0$ die Größen n_2 und k_2 positiv reell sein können. Sie stimmen nicht mit A (55) und (2) überein. Außerdem setzen wir fest, daß für $E_{1,2} > 0$ $n_{1,2}$ positiv imaginär ist. (Begründung in Note 1.) Dann wird $k_{1,2}$ negativ imaginär.

Die Eigenfunktion des Endzustandes ψ_2 wird in bekannter Weise normiert. Für den Normierungsfaktor N_2 gilt für $E_2 > 0$ nach A, Note 10 (G)

$$(6) \quad N_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{|n_2|}{1 - e^{-2\pi |n_2|}}$$

und für $E_2 < 0$ nach Note 2 (B) dieser Arbeit

$$(7) \quad \begin{cases} N_2^2 = \frac{k_2^3}{\pi n_2} \quad \text{für } m = 0, \\ N_2^2 = \frac{k_2^5}{\pi n_2} (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \quad \text{für } m = 1. \end{cases}$$

Die Normierung von ψ_1 nehmen wir in etwas anderer Weise vor. Wir betrachten nicht ein einzelnes einfallendes Elektron, sondern eine „Welle negativer Ladung“ und normieren so, daß die Dichte $|\psi_1|^2$ dieser Welle in großer Entfernung vom Kern einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Dabei können wir, weil ψ_1 einen stationären Zustand darstellt ($\Delta t = \infty$),

1) $F' = \frac{\partial F}{\partial x}$; λ_1 und λ_2 sind die parabolischen Quantenzahlen des Endzustandes.

die Energie als exakt definiert annehmen. Wir verlangen $|\psi_1|^2 = \frac{1}{v_1}$. Das entspricht einem Elektronenstrom von 1 Elektron pro Zeit- und Flächeneinheit. Somit wird mit Rücksicht auf A, Note 10 (F):

$$(8) \quad N_1^2 = \frac{2\pi |n_1|}{1 - e^{-2\pi |n_1|}} \cdot \frac{1}{v_1} \cdot 1)$$

Nun fassen wir die normierten Matrixelemente zusammen, die Übergängen in Zustände mit gleicher Endenergie entsprechen; wir bilden also:

$$(9) \quad \begin{cases} M_q^2 = \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \cdot N_1^2 N_2^2 \cdot |M_q|^2 \cdot |k_2|^2 \cdot d|k_2| \\ \text{für } E_2 > 0, \\ M_x^2 = \sum_0^{n_2-1} (\lambda_2) N_1^2 N_2^2 |M_x|^2, \\ M_z^2 = 2 \cdot \sum_0^{n_2-2} (\lambda_2) N_1^2 N_2^2 |M_z|^2 \\ \text{für } E_2 < 0, \end{cases}$$

Der Faktor 2 bei M_z^2 rührt davon her, daß zu jedem Quantenzahltripel n_2, λ_2, m bei $m \geq 1$ zwei Eigenfunktionen gehören, entsprechend den beiden φ -Abhängigkeiten $e^{im\varphi}$ und $e^{-im\varphi}$.²⁾

Als Intensität J bezeichnen wir die gesamte in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie eines bestimmten Frequenzintervalls.³⁾ Nach einer quantenmechanischen Formel wird:

$$(10) \quad \begin{cases} J = \frac{2e^2}{3c^3} (2\pi\nu)^4 \cdot M^2 \cdot 2, \\ M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_x^2 + 2M_z^2. \end{cases}$$

Diese Formel läßt bekanntlich eine Deutung der Matrixelemente als elektrische Momente zu. Man erhält sie nämlich aus der klassischen Dipolformel

$$J = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d^3 p}{dt^3} \right)^2,$$

wenn man hier das Dipolmoment $p = p_0 \cdot \cos \omega t$ durch die Größe $M_q e^{i\omega t} + M_q^* e^{-i\omega t}$ ersetzt und dann über die Zeit

1) Die Normierung ist bis auf Konstante dieselbe, wie sie in A verwendet wird. Vgl. A, S. 292, d.

2) Vgl. A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband (im folgenden mit C bezeichnet) S. 182. Z. 8.

3) Beim „diskreten“ Spektrum: einer bestimmten Frequenz.

mittelt. Summiert bzw. integriert man dann gemäß (9), so ist M_q durch \mathbf{M}_q zu ersetzen.

Es seien jetzt noch einige Beziehungen angegeben, von denen wir sogleich Gebrauch machen werden. Nach (3) und (5) ist:

$$(11) \quad k k' = k_1^2 - k_2^2 = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_1 - E_2) = -\frac{8\pi^2 m}{h} \cdot v.$$

Außerdem gilt:

$$(12) \quad |k_1| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h} m v_1$$

und

$$(13) \quad a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}.$$

Der Ausdruck für J , der sich aus den angegebenen Formeln ergibt, lautet für das kontinuierliche Spektrum:

$$(14) \quad J = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Z^2 e^6}{c^3 m^2 v_1^2} \cdot g \cdot d v.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{4\pi\sqrt{3} \cdot e^{-2|n_1|\pi}}{(1 - e^{-2|n_1|\pi})(1 - e^{-2|n_2|\pi})} \cdot \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1 + n_2)^4} \\ &\quad \cdot \int_0^\pi \left\{ |m_x|^2 + 2 \cdot \frac{|m_z|^2}{2} \right\} \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \right.$$

und für das diskrete Spektrum

$$(16) \quad J = \frac{128\pi^4 Z^4 e^{10}}{3\sqrt{3} c^3 m h^2 v_1^2 n_2^3} \cdot g.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{8\pi\sqrt{3} e^{-2|n_1|\arctg \frac{2|n_1|n_2}{|n_1|^2 - n_2^2}}}{1 - e^{-2|n_1|\pi}} \cdot \frac{|n_1|^2 \cdot n_2}{(|n_1|^2 + n_2^2)^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_0^{n_1-1} (\lambda_2) |m_x|^2 + 4 \sum_0^{n_2-2} (\lambda_2) k_2^2 (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) |m_z|^2 \right\}, \\ &\quad 0 \leq \arctg \leq \pi. \end{aligned} \right.$$

Unter $|m_x|^2$ und $|m_z|^2$ sind die Ausdrücke (1) und (2) ohne den Faktor $|C|^2$ und im zweiten Ausdruck (1) auch ohne $\sin^2 \beta$ zu verstehen. Die Zerlegung von J in zwei Faktoren haben wir vorgenommen, um den Vergleich mit den Kramersschen Formeln zu erleichtern. Aus demselben Grunde haben wir an einer Stelle n_1 durch v_1 ausgedrückt, während wir sonst zur Bezeichnung des Anfangs- und Endzustandes ausschließlich n_1 und n_2 benutzt haben.

1) Der Faktor $\frac{1}{2}$ bei $|m_x|^2$ rührt von der Integration über β her, der Faktor 2 berücksichtigt $|m_y|^2$, das gleich $|m_z|^2$ ist.

§ 3. Das Spektrum in der Umgebung der kurzwelligen Grenze

Zunächst erwähnen wir die Formel

$$(18) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{x}{\alpha}\right) = L(x, -\beta)^{-1},$$

die wir bald verwenden werden. Ihr Beweis ist in A, S. 273 Anm. 1 angegeben. Die Formel gilt natürlich auch dann noch, wenn wir $F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{x}{\alpha}\right)$ durch $F\left(\beta, \alpha, 1, \frac{x}{\alpha}\right)$ ersetzen, da die hypergeometrische Funktion bezüglich ihrer ersten beiden Argumente symmetrisch ist.

Nun wollen wir das Gebiet unseres Spektrums betrachten, wo kontinuierliches und diskretes Spektrum aneinandergrenzen (kurzwellige Grenze des kontinuierlichen = langwellige Grenze des diskreten Spektrums). An der kurzwelligen Grenze können wir (1) durch

$$(19) \quad \begin{cases} |M_z|^2 = |C|^2 \cdot |n_2|^2 \cdot \left| L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' \right|^2 = |C|^2 \cdot |m_z|^2, \\ |M_z|^2 = |C|^2 \cdot |n_2|^2 \cdot |L'|^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha = |C|^2 \sin^2 \beta |m_z|^2, \\ L = L\left(-4n_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, -n_1\right) \end{cases}$$

ersetzen. Bis auf Faktoren entnehmen wir (19) aus A (83).²⁾ Die Richtigkeit der Faktoren geht z. B. aus der Bemerkung hervor, daß die erste hypergeometrische Funktion in (1) gemäß (18) beim Grenzübergang in L übergehen muß. Wir erhalten hiermit aus (9), wenn wir nach β integrieren und (6) benutzen

$$(20) \quad \begin{cases} M_z^2 = N_1^2 \cdot \frac{|n_2| |k_2|^3 d |k_3|}{(2\pi)^3} |C|^2 \cdot 2\pi |n_2|^2 \\ \quad \cdot \int_0^\pi \left| L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' \right|^2 \sin \alpha d\alpha, \\ M_z^2 = N_1^2 \cdot \frac{|n_2| |k_2|^3 d |k_3|}{(2\pi)^3} |C|^2 \cdot \pi |n_2|^2 \\ \quad \cdot \int_0^\pi |L'|^2 \sin^2 \alpha d\alpha. \end{cases}$$

1) $L(x, n)$ ist die Laguerre-Funktion vom komplexen Index n , wie in A in einer Normierung, die von der üblichen um den Faktor $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$ abweicht.

2) Dabei haben wir zu beachten, daß nach dem im Anschluß an Gl. (4) und (5) Gesagten das Vorzeichen von n_1 anders gewählt wurde als in A.

Beim diskreten Spektrum ersetzen wir die Summation in (9) durch eine Integration und erhalten, wenn wir die für große n_2 (kleine k_2) zulässigen Vernachlässigungen vornehmen, insbesondere bei M_x^2 statt $\lambda_{1,2} + 1$ kurz $\lambda_{1,2}$ schreiben, aus (9), (2) und (7):

$$(21) \quad \begin{cases} M_x^2 = N_1^2 \cdot \frac{k_2^3}{\pi n_2} |C|^2 \cdot \int_0^{n_2} n_2 F + 2F'^2 d\lambda_2, \\ M_z^2 = N_1^2 \cdot \frac{k_2^3}{\pi n_2} |C|^2 \cdot 2 \int_0^{n_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} |F'|^2 d\lambda_2, \\ F = F\left(-\lambda_2, n_1, 1, \frac{4n_1}{n_2}\right). \end{cases}$$

Wir führen durch $\lambda_2 = n_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ die neue Integrationsvariable α ein. Dann wird $\lambda_1 \sim n_2 - \lambda_2 = n_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ und, wenn wir unter Benutzung von (18) zur Grenze $n_2 \rightarrow \infty$ übergehen:

$$(22) \quad \begin{cases} M_x^2 = N_1^2 \cdot \frac{k_2^3}{\pi n_2} |C|^2 \cdot \frac{n_2^3}{2} \int_0^\pi \left| L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' \right|^2 \sin \alpha d\alpha, \\ M_z^2 = N_1^2 \cdot \frac{k_2^3}{\pi n_2} |C|^2 \cdot \frac{n_2^3}{4} \int_0^\pi |L'|^2 \sin^3 \alpha d\alpha, \end{cases}$$

wobei L dieselbe Funktion wie in (19) ist. Die Ausdrücke (20) und (22) geben bis auf einen aus (10) ersichtlichen Faktor die Intensität beiderseits der kurzwelligen Grenze an. (20) bezieht sich auf einen Wellenzahlbereich $d|k_2|$, (22) auf den Bereich einer Quantenzahl $dn_2 = 1$. Um die beiden Intensitäten zu vergleichen, gehen wir zum Frequenzbereich $d\nu$ über, indem wir in (20) $d|k_2|$ durch $\frac{d|k_2|}{d\nu} d\nu$ ersetzen und in (22) den Faktor $\frac{dn_2}{d\nu} d\nu$ hinzufügen. Abgesehen vom Vorzeichen ist nach (11) und (4):

$$(23) \quad \frac{d\nu}{dk_2} = \frac{h}{4\pi^2 m} k_2.$$

$$(24) \quad \frac{dn_2}{d\nu} = \frac{h}{4\pi^2 m} \cdot \frac{k_2^3}{n_2}.$$

Es wird daher, wenn wir in (20) und (22) N_1^2 , die Integrale und die Zahlenfaktoren weglassen, in denen (20) und (22) ersichtlich übereinstimmen:

$$(25) \quad M_q^2 \sim \frac{4\pi^2 m}{h} |C n_2|^2 \cdot |k_2 n_2| d\nu$$

beiderseits der kurzwelligen Grenze des kontinuierlichen Spektrums. $k_2 n_2$ ist nach (4) unabhängig von n_2 , dasselbe gilt für $|C \cdot n_2|$ in unserem Falle ($k_2 \sim 0$). Hiermit ist gezeigt, daß die Intensität pro Frequenzintervall in der Umgebung der kurzwelligen Grenze konstant ist, vorausgesetzt, daß man das Intervall genügend groß wählt, so daß mehrere Linien des diskreten Spektrums erfaßt werden. Daß man trotzdem in Röntgenspektren einen plötzlichen Intensitätsabfall an der durch $h\nu_g = \frac{m}{2} v_1^2$ festgelegten Stelle beobachtet, müssen wir also darauf zurückführen, daß der Frequenzbereich, der diskreten Linien, die von Übergängen in unbesetzte Zustände herrühren, einen verschwindend kleinen Teil des ganzen Spektrums einnimmt. Das ist bei den üblichen hohen Spannungen der Fall.

§ 4. Die korrespondenzmäßige Strahlung

Der Standpunkt, auf den die Kramersschen Rechnungen sich gründen, ist der der „alten Quantentheorie“. Die Berechnungen der Strahlungsintensitäten sind rein klassisch.

Bei unserem Problem ist der Anfangszustand des Elektrons eine Hyperbelbahn. Das kontinuierliche Spektrum entsteht durch Übergänge von Elektronen in andere Hyperbelbahnen, das „diskrete“ durch Übergänge in Ellipsenbahnen. Es wird die klassische Ausstrahlung eines Elektrons berechnet, das sich in der Anfangsbahn bewegt. Hierdurch sollen die Intensitäten und damit die Übergangswahrscheinlichkeiten in andere Bahnen festgelegt werden. Das erhaltene Spektrum ist aber rein kontinuierlich und muß daher im Frequenzbereich, der Übergängen in Ellipsenbahnen entspricht, noch abgeändert werden; es soll hier diskret sein. Das wird dadurch erreicht, daß man hier die Intensität des Spektrums gewissermaßen auf die erlaubten Frequenzen konzentriert. Die Intensität, die vorher einem gewissen Frequenzintervall in der Umgebung einer erlaubten Frequenz zukam, wird jetzt dieser Frequenz allein zugesprochen.¹⁾

Aus der Kramersschen Rechnung ergibt sich für die Intensität der Strahlung unseres Elektronenstroms:

$$(26) \quad J = \frac{32 \pi^2}{3 \sqrt{3}} \frac{Z^2 e^5}{c^3 m^2 v_1^3} g'(\gamma_0) d\nu \quad \text{mit} \quad \gamma_0 = \frac{2\pi \nu Z e^2}{m v_1^3}$$

für das kontinuierliche Spektrum [vgl. B (71), wo $s \cdot A \cdot d\sigma$ für unseren Fall gleich 1 zu setzen und der in dieser Gleichung näherungsweise gleich 1 gesetzte Faktor $g'(\gamma_0)$ hinzuzufügen

1) Näheres in der Arbeit von Kramers.

ist]. v_1 ist die Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen. Die Funktion $g'(\gamma_0)$ hat Kramers zunächst näherungsweise berechnet und in Fig. 6 dargestellt. Exakt gibt sie Kramers in Note †, S. 860 an¹⁾:

$$(27) \quad g'(\gamma_0) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} i\gamma_0 H_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0) H_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0).$$

In Fig. 1 ist $g'(\gamma_0)$ in genäherter und exakter Form gezeichnet. Kramers findet keinen Unterschied beider Kurven, da er in (27) eine falsche Näherung für große γ_0 benutzt. Richtig lautet diese

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} g'(\gamma_0) \rightarrow 1 + 0,218 \gamma_0^{-\frac{2}{3}} \\ \text{für } \gamma_0 \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

wie aus den Debyeschen Näherungsformeln für die Hankelfunktionen oder durch direkte Anwendung der Sattelpunktmethode sich ergibt. Wir geben auch noch die Näherungsformel für kleine γ_0 an:

$$(29) \quad g'(\gamma_0) \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{\zeta\gamma_0}{2} (1 + \pi\gamma_0) \text{ für } \gamma_0 \rightarrow 0.$$

Hier bedeutet $\lg \zeta = 0,5772$ die Eulersche Konstante.

Die Intensität des diskreten Spektrums erhalten wir, wenn wir dem Übergang in den diskreten Zustand n_2 nach B (53) ein Frequenzintervall $\Delta\nu$ des klassischen (kontinuierlichen) Spektrums zuordnen:

$$(30) \quad \Delta\nu = \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^3} \left(\frac{1}{\left(n_2 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \sim \frac{4\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^3 n_2^3},$$

$$(31) \quad J = \frac{128\pi^4 Z^4 e^{10}}{3\sqrt{3} c^3 m h^3 v_1^2 n_2^3} \cdot g'(\gamma_0).$$

(26) und (31) sind die Kramersschen Intensitätsformeln, die wir mit den wellenmechanischen vergleichen werden. Führt man, im Gegensatz zu Kramers, die Näherung in (30) nicht durch, so erhält man statt (31) die Formel

$$(31a) \quad J = \frac{128\pi^4 Z^4 e^{10}}{3\sqrt{3} c^3 m h^3 v_1^2} \cdot \frac{n_2}{\left(n_2^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \cdot g'(\gamma_0),$$

1) Eine Ausführung der exakten Rechnung gibt G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 27. S. 257. 1924. Es soll an dieser Stelle nur auf die klassische Berechnung des Spektrums der Hyperbelbahn hingewiesen werden, nicht auf die Wentzelsche Anwendung des Korrespondenzprinzips (vgl. § 9).

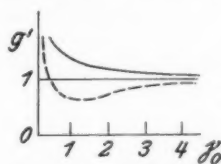


Fig. 1. $g'(\gamma_0)$ [vgl. (26)].
--- näherungsweise
— genau

die auch verschiedentlich verwendet worden ist, aber in dieser Arbeit nicht ausführlich diskutiert werden soll. Es genügt der Hinweis, daß (31a) sich von (31) um einen nur von n_2 abhängigen Faktor unterscheidet.¹⁾ Eine getrennte Prüfung dieser Formel auf Grund der wellenmechanischen Ergebnisse erübrigt sich daher.

Setzt man in (26) und (31) $g'(\gamma_0)$ gleich 1, so erhält man die Intensitätsformeln in der Form, wie sie bei Anwendungen der Kramersschen Theorie meist benutzt worden sind. Eddington wendet z. B. die auf diese Weise vereinfachte Formel (26) auf astrophysikalische Fragen an.²⁾ Wir werden beim Vergleich mit der Wellenmechanik sehen, daß diese vereinfachten Formeln den Verlauf der Intensität oft besser wiedergeben als die ursprünglichen Formeln (26) und (31).

Wenn wir (26) und (31) mit (14) und (16) vergleichen, sehen wir, daß die Gegenüberstellung der wellenmechanischen und der korrespondenzmäßigen Ergebnisse auf einen Vergleich der Größen g und g' hinausläuft.

II. Vergleich zwischen klassischen und wellenmechanischen Ergebnissen

Zunächst sollen jetzt die beiden Spezialfälle langsamer und schneller Elektronen behandelt werden. Wir müssen also in unseren Formeln Grenzübergänge ausführen.

§ 5. Langsame Elektronen

Um zu den für langsame Elektronen gültigen Formeln zu gelangen, haben wir in den Ausdrücken des § 2 $|n_1| \rightarrow \infty$ gehen zu lassen.

a) Kontinuierliches Spektrum

Wie in A, § 11, wollen wir eine bestimmte Stelle im kontinuierlichen Spektrum durch das Verhältnis ihrer Frequenz ν zur Grenzfrequenz ν_g ($h\nu_g = \frac{m}{2}v_1^2$) kennzeichnen. Jeder solchen Stelle kommt unabhängig von der Größe von n_1 (an-

1) Vgl. das Ende von § 5.

2) A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars* (1955.42). Eddington wendet auch für das diskrete Spektrum diese kontinuierliche Formel an. Eine solche gemittelte Behandlung des diskreten Spektrums liefert natürlich nicht die gleiche Gesamtintensität für das ganze Spektrum wie eine Anwendung von (31) (Summation über n_2). Vielmehr entspricht sie einer Anwendung der „genauen“ Formel (31a).

gelegte Spannung) ein bestimmtes Verhältnis n_1/n_2 zu. Zu $\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{3}{4}$ gehört z. B. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$. Fassen wir daher beim Grenzübergang $|n_1| \rightarrow \infty$ eine bestimmte Stelle des Spektrums ins Auge, so geht gleichzeitig $|n_2| \rightarrow \infty$, d. h. wir haben zur Grenze $|n_1| = \varrho |n_2| \rightarrow \infty$ mit $\varrho = \text{const} < 1$ überzugehen.

Der Fall der kurzwelligen Grenze ($\varrho = 0$) ist in A § 9 behandelt. Er liefert nach A (87a) die Depolarisation

$$(32) \quad D = \frac{M_x^2}{M_z^2} = \frac{1}{4}$$

und eine Intensität, die in unserer durch (14) vereinbarten Schreibweise lautet:

$$(33) \quad g = 1.$$

Letzteres ergibt sich folgendermaßen. Wir gehen in (15) gemäß $\varrho = 0$ nacheinander zu den Grenzen $|n_2| \rightarrow \infty$ und $|n_1| \rightarrow \infty$ über. Der vor dem Integral stehende Ausdruck wird dann

$$(33a) \quad \frac{4\pi \sqrt{3}}{e^2 |n_1| \pi} \cdot \frac{n_1^2}{n_2^2}.$$

Das Integral in (15) wird, wenn wir statt (1) die spezialisierte Formel (19) benutzen, nach A, § 9 in der dort verwendeten Bezeichnungsweise:

$$(33b) \quad |n_2|^2 \cdot \frac{1}{|n_1|^2} \cdot \frac{e^2 |n_1| \pi}{9 \cdot 16} (Q_{1/2} + Q_{3/2}).$$

Mit Rücksicht auf die Werte der Q erhält man aus (33a) und (33b) die Intensität (33).

Der Fall positiver ϱ liefert nach Rechnungen von O. Scherzer¹⁾ dieselben Resultate.

Allerdings läßt sich nicht zeigen, daß die Grenzwerte gleichmäßig bezüglich aller $\varrho < 1$ erreicht werden. Mit anderen Worten, auch für große $|n_1|$ ist die Gültigkeit von (32) und (33) nicht sicher, wenn ϱ in der Nähe von 1 liegt, d. h. für das langwellige Grenzgebiet. Der Bruchteil des gesamten kontinuierlichen Spektralbereichs, wo hiernach die Gültigkeit von (32) und (33) fraglich ist, ist aber für genügend große $|n_1|$ beliebig klein, so daß wir die Formeln als für langsame Elektronen allgemein gültig betrachten können. Auf den Fall des langwelligen Grenzgebiets werden wir später (§ 7) einzugehen haben.

Die Intensität ist hiernach frequenzunabhängig. Ihre Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit ist nach (14) durch $1/v_1^2$ gegeben.

b) Diskretes Spektrum

Führen wir in (2) nach (18) den Grenzübergang

$$|n_1| \rightarrow \infty (k_1 \rightarrow 0)$$

1) O. Scherzer, Die vorhergehende Arbeit, § 3 und Zusatz 2.

durch, so ergibt sich

$$(34) \quad \begin{cases} |M_x|^2 = |C|^2 \cdot |n_1|^2 \cdot |L(4n_2, \lambda_2) - 2L'(4n_2, \lambda_2)|^2, \\ |M_z|^2 = |C|^2 \cdot \frac{1}{k_2^2 \cdot (\lambda_2 + 1)^2} |n_1|^2 \cdot |L'(4n_2, \lambda_2 + 1)|^2, \end{cases}$$

also

$$(35) \quad |m_x|^2 = |n_1|^2 \cdot |L_{\lambda_2} - 2L'_{\lambda_2}|^2, \quad |m_z|^2 = \frac{|n_1|^2}{k_2^2 \cdot (\lambda_2 + 1)^2} |L_{\lambda_2 + 1}|^2.$$

Die Depolarisation, die durch (32) definiert ist, ist durch (9), (7) und (34) gegeben. Wir geben sie für die drei ersten Werte von n_2 an:

Tabelle 1

n_2	1	2	3
D	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{104}{923}$

Beim Übergang eines Elektrons in den Grundzustand ist demnach die emittierte Strahlung vollkommen polarisiert. Das kommt daher, daß die Eigenfunktion ψ_2 des Grundzustandes genau wie die Eigenfunktion ψ_1 des ankommenden Elektrons die magnetische Quantenzahl $m = 0$ besitzt, so daß beim Übergang $\Delta m = 0$ ist.

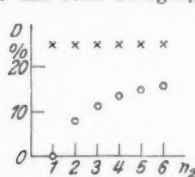


Fig. 2. Depolarisation im kontinuierlich-diskreten Spektrum (langsame Elektronen).
 × nach Kramers
 o wellenmechanisch

In Fig. 2 ist D für die ersten 6 Linien in Prozenten aufgetragen. D nähert sich mit wachsendem n_2 dem Grenzwert 25 Proz.

Nun zur Intensität: (17) vereinfacht sich in unserem Falle großer $|n_1|$ zu

$$(36) \quad g = 8\pi\sqrt{3} e^{-4n_2} \cdot \frac{n_2}{|n_1|^2} \cdot \{ \dots \}.$$

In die $\{ \}$ sind die Werte (35) einzusetzen, wobei sich $|n_1|^2$ heraushebt. Wir haben also nach (16) auch hier $J \sim \frac{1}{v_1^3}$

als Abhängigkeit der Intensität von der Elektronengeschwindigkeit. Für niedrige Werte von n_2 läßt sich die $\{ \}$ auf Grund von A (50) verhältnismäßig leicht ausrechnen. Die Reihe bricht wegen der Ganzzahligkeit von λ_2 ab. Man erhält dabei folgende Werte:

Tabelle 2

n_2	1	2	3	4	5	6
g	0,797	0,876	0,91	0,92 ₅	0,93 ₅	0,94 ₅
G	0,8	0,9	0,9	1,0	—	—

Unter G sind die Werte für g angegeben, die I. A. Gaunt¹⁾ erhält. Gaunt rechnet in Polarkoordinaten und muß daher noch eine zweite Summation ausführen, gemäß dem Ansatz A (32) für die ebene Welle. Diesen Rechnungen gegenüber erweist sich die Benutzung parabolischer Koordinaten als bedeutend einfacher. Die Zahlen in Tab. 2 ließen sich, wenigstens die ersten drei, ohne Schwierigkeiten noch genauer angeben. Da g merklich konstant ist, ist die relative Intensität der einzelnen Linien nach (16) ungefähr durch $1/n_2^3$ gegeben. Für große n_2 nähert sich g dem Werte 1, dem Werte im kontinuierlichen Spektrum, wie es sein muß.

c) Kramerssche Theorie

Unseren Matrixelementen entsprechen in der klassischen Theorie die elektrischen Momente:

$$(37) \quad \begin{cases} \psi(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \left| H_{2/3}^{(1)} \left(\frac{i\gamma}{3} \right) \right|, \\ \varphi(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \left| H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{i\gamma}{3} \right) \right|. \end{cases}$$

(37) stimmt überein mit B (28). $\psi(\gamma)$ und $\varphi(\gamma)$ sind die für den Fall einer parabolischen Anfangsbahn berechneten elektrischen Momente, beziehen sich also auf unseren Fall langsamer Elektronen. Wir spalten das in B (56) bei der Mittelung über die verschiedenen Werte des Stoßparameters auftretende Integral gemäß B (31) in die beiden Teile

$$(37a) \quad \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{\psi^2(\gamma)}{\gamma} d\gamma, \quad \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{\varphi^2(\gamma)}{\gamma} d\gamma$$

auf, die den beiden Fällen der Polarisierung in der x -Richtung und senkrecht dazu entsprechen, und erhalten somit für die Depolarisation

$$(37b) \quad D = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\infty \frac{\varphi^2(\gamma)}{\gamma} d\gamma}{\int_0^\infty \frac{\psi^2(\gamma)}{\gamma} d\gamma}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, daß nur die Hälfte der senkrecht zur x -Achse polarisierten Strahlung für die Beobachtung in y -Richtung in Frage kommt. Mit den Werten (37) ergibt

1) I. A. Gaunt, a. a. O. Proc. (4.2).

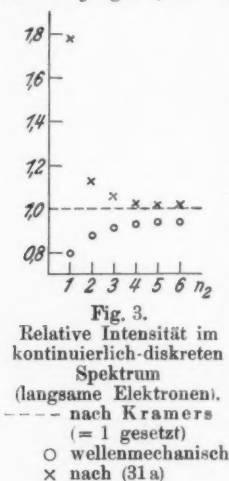
sich nach A, S. 291 für D der Wert $\frac{1}{4}$, der in Fig. 2 vergleichsweise eingetragen ist (\times). Wir haben Übereinstimmung mit der Wellenmechanik in der Umgebung der kurzwelligen Grenze, wozu wir das kontinuierliche Spektrum rechnen können (mit Ausnahme seines langwelligen Randgebiets, vgl. § 7).

Wir gehen zur Intensität über, wobei wir wie bei der Polarisation kontinuierliches und diskretes Spektrum gemeinsam behandeln können, da die klassische Strahlung nur durch den Anfangszustand gegeben ist, während die Unterscheidung zwischen beiden Spektren vom Endzustand herrührt. Weil v_1 klein ist, wird nach (26) γ_0 groß und nach Fig. 1:

$$(38) \quad g'(\gamma_0) = 1.$$

Für das langwellige Randgebiet wird allerdings γ_0 klein und damit g' groß; hier gilt aber dasselbe, was schon in a) über diesen Fall gesagt worden ist.

Das Gebiet, in dem die Kramerssche Theorie die Intensität richtig wiedergibt, ist also dasselbe wie bei der Polarisation. Aus Tab. 2 geht jedoch hervor, daß auch in dem übrigen Teil des Spektrums die durch die Wellenmechanik geforderten Korrekturen höchstens etwa 20 Proz. betragen. Die Kramerssche Rechnung führt also für langsame Elektronen zu guten Resultaten. In Fig. 3 ist g nach Tab. 2 graphisch wiedergegeben. Die gestrichelte Gerade ist $g' = 1$, der Kramerssche Wert. Außerdem ist hier zum Vergleich auch einmal die Intensität (\times) angegeben, wie sie sich nach (31a) ergibt. Wir sehen, daß ihre Abweichung vom wellenmechanischen Ergebnis größer ist als bei (31).



§ 6. Schnelle Elektronen

Wir gehen nun zum anderen Grenzfall über, der durch $|n_1| \rightarrow 0$ gekennzeichnet ist. Zunächst betrachten wir wieder das kontinuierliche Spektrum.

a) Kontinuierliches Spektrum

Für den hier durchzuführenden Grenzübergang $|n_1| \rightarrow 0$, $|n_2| \rightarrow 0$ gilt entsprechendes wie für den in § 5a ausgeführten: Ist $|n_1|$ klein, so ist für den größten Teil des Spektrums

auch $|n_2|$ klein. Der Grenzübergang ist in A, § 11 durchgeführt. Polarisation und Intensität sind in A in den Formeln (99) und (99b) und den Figg. 5 und 7 angegeben. Um mit unserer Definition der Intensität in Übereinstimmung zu bleiben, haben wir alle drei Komponenten der Matrixelemente zu berücksichtigen, also statt A (99a), zu schreiben:

$$(39) \quad M_x^2 + 2M_z^2 \sim |A n_1|^2 \cdot \left(\frac{k'^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \cdot \frac{2k_1}{k_2} \lg \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}$$

und für (99b), wenn wir k_1/k_2 durch n_2/n_1 ersetzen,

$$(40) \quad J \sim \frac{n_1^3}{e^{2|n_1|/\pi} - 1} \cdot \frac{n_2}{1 - e^{-2|n_2|/\pi}} \cdot \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}.$$

(40) gibt an, wie die Intensität von Elektronengeschwindigkeit und beobachteter Frequenz abhängt. Diese Abhängigkeit ist ziemlich kompliziert und wird daher am besten an Hand einer graphischen Darstellung diskutiert, was in § 8 geschehen wird. Hier entwickeln wir, um direkt auf Grund einfacher Formeln einen Vergleich mit der klassischen Theorie durchführen zu können, noch die Exponentialfunktionen und erhalten:

$$(40a) \quad J \sim n_1^3 \cdot \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}.$$

Soll diese Entwicklung berechtigt sein, so müssen n_1 und n_2 sehr klein sein [etwa $\frac{1}{30}$ und kleiner].¹⁾ Das bedeutet aber, daß wir es mit recht beträchtlichen Geschwindigkeiten zu tun haben. $|n_1| = \frac{1}{30}$ ent-

spricht etwa einer Geschwindigkeit $v_1 = \frac{2}{9} Zc$, wobei Z die Kernladungszahl und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Demnach gilt (40a) eigentlich nur für $Z=1$ (Bremsung an Protonen) und auch hier ist der Geschwindigkeitsbereich, in dem (40a) anwendbar ist, klein, da wir ja unrelativistisch rechnen. Der logarithmische Faktor in (40a) gibt die Frequenzabhängigkeit der Intensität an, die unabhängig von n_1 immer dasselbe Bild liefert, weil im Argument des Logarithmus nur das Verhältnis n_1/n_2 auftritt. Der Faktor n_1^3 besagt, daß die Abhängigkeit von v_1 gegeben ist durch

$$(41) \quad J \sim \frac{1}{v_1^3}.$$

Diese Abhängigkeit der Intensität pro Intervall $d\nu$ bezieht sich auf ein bestimmtes ν/ν_0 , d. h. eine bestimmte „Stelle“ im Spektrum, nicht auf eine festgehaltene Frequenz ν . Wird dagegen ν festgehalten, so nehmen bei wachsendem v_1 die Größen ν/ν_0 und n_1/n_2 ab. Dabei wächst das logarithmische Glied in (46a), so daß die Abnahme der Intensität bei wachsendem v_1 etwas schwächer ist als in (41).

1) Bei $|n_1| \sim \frac{1}{30}$, $|n_2| \sim \frac{1}{30}$ machen wir immer noch einen Fehler von etwa 20 Proz.

Geht man in (1) mit $|n_1|$ allein gegen 0, so geht dort

$$(42) \quad x \rightarrow 0 \text{ und } F \rightarrow 1.$$

Somit wird

$$(43) \quad \begin{cases} |M_x|^2 = |C|^2 \cdot |n_2|^2, \\ |M_z|^2 = |C|^2 \cdot \sin^2 \alpha \sin^2 \beta |n_1(1+n_2)|^2. \end{cases}$$

Integrieren wir gemäß (9) über α und β , so erhalten wir eine Depolarisation

$$(44) \quad D = \frac{M_x^2}{M_z^2} = \frac{|n_1|^2}{3} \left(1 + \frac{1}{|n_2|^2} \right) = \frac{|n_1|^2}{3} \left(1 - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Diese Formel werden wir später brauchen. Sie gilt nur in einem relativ kleinen Teil des Spektrums und führt in Übereinstimmung mit A (86) für die kurzwellige Grenze zu

$$(45) \quad D = \frac{|n_1|^2}{3}.$$

Die Intensität an der kurzwelligen Grenze ist durch A (87b) gegeben und liefert folgende Abhängigkeit von v_1 :

$$(46) \quad J \sim \frac{n_1^4}{e^{2|n_1|\pi} - 1} \sim |n_1|^3 \sim \frac{1}{v_1^3}.$$

Um die absoluten Intensitäten zu bekommen, schreiben wir statt (40) und (46) noch unsere Ausdrücke g aus (15) und (17) hin, ohne auf die Ausrechnung der konstanten Faktoren einzugehen.

$$(47) \quad \begin{cases} g = \frac{4\pi\sqrt{3}|n_1n_2|}{(e^{2|n_1|\pi} - 1)(1 - e^{-2|n_2|\pi})} \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}, \\ g = \frac{8\pi\sqrt{3}|n_1|^3}{e^{2|n_1|\pi} - 1} \left(1 + \frac{10}{3}|n_1|^2 \right) \quad (\text{kurzwellige Grenze}). \end{cases}$$

Den Ausdruck für die kurzwellige Grenze haben wir noch durch die in A (85a) und (86) enthaltene nächste Näherung ergänzt.

Entwickeln wir auch hier die Exponentialfunktionen, so wird aus (47):

$$(47a) \quad \begin{cases} g = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}, \\ g = 4\sqrt{3}|n_1| \quad (\text{kurzwellige Grenze}). \end{cases}$$

b) Diskretes Spektrum

Hier haben wir nur $|n_1|$ klein zu machen, da der Bereich der n_2 durch Änderung von n_1 keine Erweiterung erfährt. Dabei gilt wieder (42). Die Ableitungen der hypergeometrischen Funktionen werden klein, wenn $|n_1|$ klein wird. Aus (2) wird also

$$(48) \quad \begin{cases} |M_x|^2 = |C|^2 \cdot n_2^2, \\ |M_z|^2 = |C|^2 \cdot \frac{1}{k_2^2} |n_1|^2. \end{cases}$$

In beiden Ausdrücken haben wir jeweils die erste nicht verschwindende Näherung angegeben. Aus (48) ergibt sich, wenn wir die Summationen in (9) ausführen¹⁾, die Depolarisation:

$$(49) \quad D = \frac{M_x^2}{M_x^2} = \frac{|n_1|^2}{3} \left(1 - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Das ist dieselbe Formel wie (44), die also immer dann gilt, wenn $|n_1| \ll |n_2|$ und $|n_1| \ll 1$ ist, unabhängig davon, ob n_2 reell oder imaginär ist. Die Polarisation ist also auch hier bei hohen Spannungen vollständig. Wir brauchen daher für die Intensität nur M_x zu berücksichtigen. In (17) ist also $|m_z|^2 = 0$ zu setzen und nach (48) $|m_x|^2 = n_2^2$. Die in (17) auftretende Summe hat lauter gleiche Summanden, liefert also n_2^3 . Es ergibt sich schließlich — n_2 hebt sich gänzlich heraus —:

$$(50) \quad g = \frac{8\pi \sqrt{3} |n_1|^3}{e^2 |n_1| \pi - 1},$$

wie im an das diskrete Spektrum anschließenden Teil des kontinuierlichen Spektrums [vgl. (47)]. Die v_1 -Abhängigkeit der einzelnen Linien ist daher auch durch (46) gegeben, die relative Intensität nach (16) exakt durch $1/n_2^3$.

c) Kramerssche Theorie

Die Berechnung der klassischen Polarisation geschieht in derselben Weise wie für langsame Elektronen. Wir haben nur die elektrischen Momente $\psi(\gamma)$ und $\varphi(\gamma)$ in (37) durch die für schnelle Elektronen gültigen

$$(51) \quad \begin{cases} \psi'(\gamma) = \gamma |H_0^{(1)}(i\gamma)| \\ \varphi'(\gamma) = \gamma |H_1^{(1)}(i\gamma)| \end{cases}$$

zu ersetzen, die in B (43) angegeben sind. Die Formeln (51) sind für ein auf geradliniger Bahn strahlendes Elektron berechnet. Den in (37a) auftretenden Integralen entsprechen hier

$$(52) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\psi'(\gamma)^2}{\gamma} d\gamma = \int_0^\infty |H_0^{(1)}(i\gamma)|^2 \gamma d\gamma \quad (\text{konvergent}), \\ \int_0^\infty \frac{\varphi'(\gamma)^2}{\gamma} d\gamma = \int_0^\infty |H_1^{(1)}(i\gamma)|^2 \gamma d\gamma \quad (\text{divergent}). \end{cases}$$

1) Man benutzt die Formel

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1);$$

vgl. z. B.: E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, S. 50, 4.

Die beiden Integrale sind in der Ausdrucksweise von A, S. 291 $\frac{1}{9} Q_0$ und $\frac{1}{9} Q_1$, also gleich $\frac{2}{\pi^2}$ und ∞ . Hieraus folgt:

$$(53) \quad D = \infty \quad \text{oder} \quad P = \frac{1-D}{1+D} = -1.$$

Die klassische Polarisierung ist also für schnelle Elektronen -1 , während sie nach der Wellenmechanik im kontinuierlichen Spektrum mit wachsender Frequenz von $P = -1$ bis $P = 1$ ansteigt, um im diskreten Spektrum diesen Wert beizubehalten.

Zweifelloos ist die Annahme einer geradlinigen Bahn für schnelle Elektronen in großer Kernnähe nicht mehr erfüllt. Daher kommt es, daß wir eine unendliche Intensität erhalten, wie in der Divergenz des zweiten Integrales zum Ausdruck kommt. Korrigiert man diesen Fehler, so ergibt sich, daß die Intensität der einen Komponente bei großem v_1 zwar nicht unendlich, aber doch sehr groß ist, so daß sich an (53) praktisch nichts ändert.

Wenn wir durchweg geradlinige Bahnen annehmen, so machen wir etwas ähnliches, als wenn wir in der wellenmechanischen Rechnung den Anfangszustand ψ_1 als ungestreute ebene Welle ansetzen. Das führt bekanntlich auch für sehr schnelle Elektronen zu einem wesentlich falschen Ergebnis; allerdings erhält man keine unendliche Intensität.

Die Größe γ_0 in (26) ist für schnelle Elektronen klein und zwar für beliebige große vorkommende Frequenzen, da durch ein Anwachsen von v_1 sich der Frequenzbereich nur proportional v_1^2 erweitert. Demnach können wir die Funktion $g'(\gamma_0)$, die die Kramersche Intensität angibt, durch ihre asymptotische Darstellung (29) für kleine γ_0 ersetzen, in der wir noch das Glied $\pi \gamma_0$ weglassen:

$$(54) \quad g'(\gamma_0) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{\zeta \gamma_0}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \left(\frac{\zeta \pi Z e^2}{m} \cdot \frac{\nu}{v_1^3} \right).$$

Nach (26) und (31) haben wir also folgende Abhängigkeit der Intensität von v_1 :

$$(55) \quad J \sim \frac{1}{v_1^2} \lg \frac{v_1}{v_0}$$

(v_0 ist eine von v_1 unabhängige Größe). Dabei ist es ganz gleichgültig, ob wir ν , $\frac{\nu}{v_0}$ oder E_2 festhalten. Diese Unterschiede kommen nur in der in (55) zu verwendenden Proportionalitätskonstanten und in der Größe von v_0 zum Ausdruck.

Die klassisch berechnete Intensität ist also für schnelle Elektronen zu groß, wie ein Vergleich von (55) mit (41) und (46) zeigt. Aus (54) geht auch hervor, daß für sehr schnelle Elektronen keine merkliche Frequenzabhängigkeit mehr vorhanden ist.

Denn wir können den logarithmischen Faktor in folgender Weise als eine Summe schreiben:

$$\lg \frac{\xi \pi Z e^2}{2 h v_1} + \lg \frac{h \nu}{\frac{m}{2} v_1^2}.$$

Hier ist bei großem v_1 der zweite Summand gegenüber dem ersten zu vernachlässigen, außer wenn wir sehr kleine Frequenzen betrachten. Auch dieses klassische Ergebnis steht im Gegensatz zur Wellenmechanik. Die relative Intensität der Linien ist wie immer durch $1/n_2^3$ gegeben.

Zusammenfassend können wir sagen, daß für schnelle Elektronen die klassische Rechnung zu schlechten Ergebnissen führt. Ein Bild über die Größenordnung der auftretenden Abweichungen gibt § 8.

§ 7. Der langwellige Rand des kontinuierlichen Spektrums

Es soll hier das langwellige Randgebiet des kontinuierlichen Spektrums betrachtet werden; es handelt sich also um den Fall, wo n_2 ungefähr gleich n_1 ist.

Wir setzen $n_1 = i n$ und $n_2 = i n (1 + \varepsilon)$, wobei n und ε positive Zahlen sind, und gehen in (1) zur Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$ über. Entwickeln wir x nach ε , so erhalten wir mit Rücksicht auf (3) und (4):

$$(56) \quad x = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Bei der Integration über α , die wir gemäß (15) auszuführen haben, durchläuft x die Zahlen auf der reellen Achse zwischen 0 und $1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$, nähert sich also für $\varepsilon \rightarrow 0$ an der einen Integrationsgrenze dem Werte 1. Da $x=1$ ein singulärer Punkt der hypergeometrischen Funktionen F ist, können wir vermuten, daß das Integral mit $\varepsilon \rightarrow 0$ über alle Grenzen wächst. Das ist, wie wir sehen werden, tatsächlich der Fall. Wir vernachlässigen daher im folgenden Beiträge zum Integral, die beim Grenzübergang unterhalb fester Schranken bleiben.

Der Grenzübergang wird in Note 3 durchgeführt. Nach Note 3 (G) können wir für unseren Grenzfall Gl. (1) ersetzen durch:

$$(57) \quad \begin{cases} |M_x| = |C| \cdot |m_x| = |C| \cdot \frac{n(1 - \cos \alpha)}{|F(1 + i n)|^2} \cdot \frac{1}{1 - x}, \\ |M_z| = |C| \cdot \sin \beta \cdot |m_z| = |C| \cdot \frac{n \sin \beta \sin \alpha}{|F(1 + i n)|^2} \cdot \frac{1}{1 - x}. \end{cases}$$

Wir bemerken nun, daß die Matrixelemente (57) in einfachem Zusammenhange mit den Matrixelementen für schnelle Elektronen stehen. Nehmen wir nämlich in den für diesen speziellen Fall abgeleiteten Ausdrücken M_x und M_z in A, S. 298 die für $n_1 \sim n_2$ zulässigen Vereinfachungen vor und multiplizieren dann mit $\frac{1}{|F(1 + i n)|^2}$, so erhalten wir nach

Übergang zum Absolutbetrag gerade die Ausdrücke (57).¹⁾ Dieser Zusammenhang, der zwischen den Matrixelementen für die beiden in § 6 und § 7 behandelten Spezialfälle besteht, muß sich natürlich auch in den Intensitätsformeln wiederfinden. Die Formeln für den jetzt zu behandelnden Spezialfall des langwelligen Randes lassen sich daher in einfacher Weise im Anschluß an § 6 gewinnen.

In der ersten Gl. (47) lassen wir also (zunächst im Faktor vor dem Logarithmus) $|n_2|$ gegen $|n_1| = n$ gehen und erhalten:

$$(58) \quad \frac{4\pi \sqrt{3} n^2}{(e^{n\pi} - e^{-n\pi})^2} \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}.$$

(58) haben wir, um die für die Intensität maßgebende Größe g zu erhalten, noch mit $\frac{1}{|\Gamma(1 + in)|^4}$ zu multiplizieren, da in die Intensität die quadrierten Matrixelemente eingehen. Nun gilt nach bekannten Beziehungen:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} |\Gamma(1 + in)|^2 &= \Gamma(1 + in) \Gamma(1 - in) = in \Gamma(in) \Gamma(1 - in) \\ &= \frac{in\pi}{\sin in\pi} = \frac{2n\pi}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \end{aligned} \right.$$

und wir erhalten durch Ausführung der Multiplikation:

$$(60) \quad g = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}.$$

Wir schreiben (60) noch um unter Benutzung von

$$\frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1^2 - k_2^2} \sim \frac{4k_1^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{4\nu_\nu}{\nu},$$

und es ergibt sich

$$(61) \quad g = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{4\nu_\nu}{\nu}.$$

Dieses Ergebnis stellt nach seiner Ableitung nur eine erste Näherung für kleine ν dar, d. h. das Argument des Logarithmus ist nur bis auf einen konstanten (von ν unabhängigen) Faktor festgelegt. Das beruht darauf, daß wir beim Grenzübergang endlich bleibende Größen vernachlässigt haben.

(61) stimmt mit dem Ergebnis von Oppenheimer²⁾ in zweiter Näherung (d. h. auch in dem konstanten Faktor im Argument des Logarithmus) überein und mit dem von Gaunt³⁾ in erster Näherung. Gaunt rechnet wie wir in erster Näherung, Oppenheimer in höherer Näherung.

In der gleichen Weise wie die Intensität gewinnen wir auch die Polarisation aus den Formeln für schnelle Elektronen. Hier brauchen wir

1) Um das zu sehen, beachte man, daß der dabei auftretende Faktor $|A|$ unserem $|C|$ entspricht.

2) J. R. Oppenheimer, *Ztschr. f. Phys.* 55. S. 725. 1929. Formel (24) enthält den betrachteten Grenzfall.

3) J. A. Gaunt, *a. a. O. Proc.* (4. 3).

uns um den Faktor $\frac{1}{|F(1+in)|^4}$ nicht zu kümmern und lassen einfach in A (99) k_2 gegen k_1 gehen.

Das ergibt

$$(62) \quad D = \frac{M_e^2}{M_e^2} = \infty \text{ oder } P = \frac{1-D}{1+D} = -1.$$

Diese Formel gilt für den langwelligen Rand des kontinuierlichen Spektrums und zwar für beliebige Röhrenspannungen. Auch bei langsamen Elektronen, wo im allgemeinen $D = \frac{1}{4}$ ist, haben wir also für sehr kleine Frequenzen $D = \infty$. Daß der Bereich, wo in diesem Falle (62) gelten kann, relativ klein ist, wurde schon in § 5 gesagt. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie. Die Ausstrahlung kleiner Frequenzen rührt nämlich in der Hauptsache von Elektronen in großer Entfernung vom Kern her. Da diese praktisch geradlinige Bahnen beschreiben, ist die Formel (53) zuständig, die mit (62) übereinstimmt.

Die Kramerssche Intensität ist wieder durch $g'(g_0)$ gegeben. g_0 wird nach (26) für kleine ν klein, so daß wir g' durch (29) ersetzen können. Also haben wir:

$$(63) \quad g' = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \left(\frac{m}{\zeta \pi Z e^2} \cdot \frac{v_1^3}{\nu} \right) \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi} \lg \frac{\nu_0}{\nu}.$$

Der Vergleich mit (61) zeigt, daß auch in der Intensität beide Theorien übereinstimmen.

Diese Übereinstimmung für $\nu \rightarrow 0$ war zu erwarten, da wegen $h\nu \rightarrow 0$ die Quantelung der Strahlungsenergie bedeutungslos wird. Auch in dem anderen Falle, wo sich Übereinstimmung ergab (nämlich im Falle großer $|n_1|$ und $|n_2|$, vgl. § 5), handelt es sich, wie wir noch bemerken wollen, um kleine Frequenzen.

§ 8. Einige graphische Darstellungen

Die Beschreibung des Intensitäts- und Polarisationsverlaufes soll im folgenden durch einige graphische Darstellungen ergänzt werden. Einmal haben wir noch die wellenmechanische Intensitätsformel (47) zu diskutieren, deren Vergleich mit der Intensität nach Kramers sich schlecht auf rein analytischem Wege durchführen ließ. Zum anderen wollen wir das diskrete Spektrum für den Fall beliebiger Elektronengeschwindigkeiten untersuchen. Beim diskreten Spektrum wird nämlich eine numerische Auswertung der allgemeinen Formeln gegenüber dem kontinuierlichen Spektrum dadurch erleichtert, daß die in (2) vorkommenden F -Funktionen wegen des negativ ganzzahligen Parameters $-\lambda_2$ bzw. $-\lambda_2 - 1$ Polynome in x sind. — Zur Kennzeichnung des Anfangs- und Endzustandes benutzen wir die Größen n_1 und n_2 .

Zuerst betrachten wir die spektrale Intensitätsverteilung für schnelle Elektronen. Fig. 4 zeigt diese für den speziellen Fall $|n_1| = \frac{1}{4}$, wie sie

sich auf Grund von (47) und (50) ergibt (ausgezogene Kurve). Das sich an die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums anschließende diskrete Spektrum nimmt nur einen kleinen Teil des gesamten Spektralbereichs ein, da bei $|n_1| = \frac{1}{4}$ die Voltzahl der Elektronen gleich der 16 facher Ionisierungsspannung ($Z^2 e^2 / 2a$) des betrachteten Atoms ist. Die Auflösung im diskreten Spektrum wurde sehr klein gewählt, um die Spitze, die dem Übergange nach $n_2 = 1$ entspricht, noch zeichnen zu können. Das hat zur Folge, daß von den anderen Linien nichts mehr

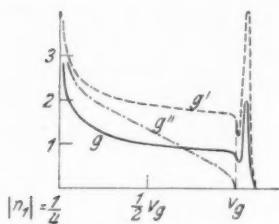


Fig. 4. Spektrale Intensitätsverteilung für $|n_1| = \frac{1}{4}$.

----- nach Kramers
 - · - - nach Wentzel
 ——— wellenmechanisch

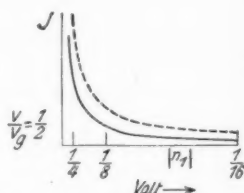


Fig. 5. Intensität in der Mitte des kontinuierlichen Spektrums als Funktion der Spannung.

----- nach Kramers
 ——— wellenmechanisch

zu sehen ist. Die Linienbreite ist natürlich größenordnungsmäßig mit experimentellen Daten nicht im entferntesten vergleichbar. Die gestrichelte Kurve stellt die nach der klassischen Theorie zu erwartende Intensität dar, die durch $g'(\gamma_0)$ gegeben ist. Der in (26) angegebene Ausdruck für γ_0 lautet, wenn man statt v_1 und v die Größen n_1 und n_2 einführt:

$$(64) \quad \gamma_0 = \frac{|n_1|}{2} \left(1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \right),$$

(64) gilt für reelle und imaginäre n_2 . Die beiden Kurven in Fig. 4 verlaufen sehr ähnlich und stimmen für kleine Frequenzen am besten überein, wie die Ausführungen in § 7 es erwarten ließen. Daß die klassische Intensität ungefähr doppelt so groß wie die wellenmechanische ist, ist auf die spezielle Wahl von n_1 zurückzuführen, hat aber keine grundsätzliche Bedeutung. Aus Fig. 4 ist noch zu ersehen, daß die Intensität (mit Ausnahme kleiner Frequenzen) durch $g' = 1$ viel besser wiedergegeben wird als durch (27). Setzt man in (26) $g' = 1$, so erhält man demnach eine Formel, die in weiteren Grenzen eine gute Näherung darstellt als (26). Auf die strichpunktierte Kurve kommen wir im nächsten Paragraphen zu sprechen.

Fig. 5 zeigt die Abhängigkeit der Intensität von der Spannung, die durch die zugehörigen Werte von $|n_1|$ gekennzeichnet ist. Es ist die Intensität in der Mitte des kontinuierlichen Spektrums ($\frac{v}{v_g} = \frac{1}{2}$) aufgetragen. Der Verlauf beider Kurven ist auch hier über Erwarten ähnlich, wenn man daran denkt, daß in (47) und (29), die bis auf einen

Faktor $1/v_1^2$ den Intensitätsverlauf angeben [vgl. (14) und (26)], gänzlich verschiedene Funktionen auftreten. Mit wachsender Spannung wird die Übereinstimmung etwas schlechter, für sehr kleine Spannungen fallen die Kurven nach § 5 zusammen, was allerdings in der Figur nicht mehr zum Ausdruck kommt.

Nun kommen wir zu den allgemeinen Intensitäts- und Polarisationskurven für das diskrete Spektrum. In Fig. 6 sind g und g' als Funktion von $|n_1|$ in logarithmischer Skala aufgetragen. n_2 ist längs der einzelnen Kurven festgehalten. Die drei Kurven g ließen sich auf Grund von (17) exakt zeichnen. Wir haben wieder gute Übereinstimmung für große $|n_1|$ und zu große klassische Intensität für kleine $|n_1|$. Außerdem

sehen wir, daß für $|n_1| \approx \frac{1}{4}$ die

Abweichung von $g=1$ höchstens 20 Proz. beträgt, so daß (31) die Intensität sehr gut wiedergibt, wenn wir den Faktor $g'(\gamma_0)$ weglassen. Die vereinfachten klassischen Formeln geben also auch hier die Verhältnisse besser wieder als die genauen.

In Fig. 7 ist die Depolarisation D für feste Werte von n_2 als Funktion von $|n_1|$ aufgetragen. Die beiden Kurven des kontinuierlichen Spektrums $|n_2| = \frac{1}{4}$ und $|n_2| = 1$, die zum Vergleich eingezeichnet sind,

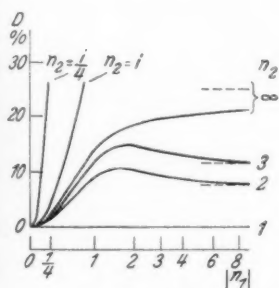


Fig. 7. Depolarisation für beliebige Elektronengeschwindigkeiten nach der Wellenmechanik

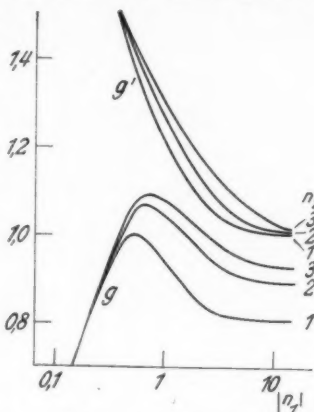


Fig. 6. $v_1^2 \times$ Intensität im kontinuierlich-diskreten Spektrum. g' nach Kramers, g wellenmechanisch

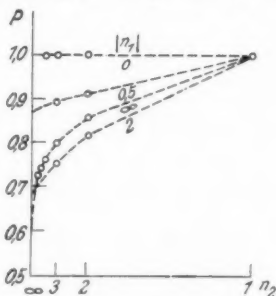


Fig. 8. Polarisation im kontinuierlich-diskreten Spektrum für vier verschiedene Elektronengeschwindigkeiten nach der Wellenmechanik

Depolarisation

Spezialfall Spektrum Art der Berechnung	v_1 klein			v_1 groß			v klein		
	Kontin.		Diskret	Kontin.		Diskret	Kontin.		Kontin.
	qu.	kl.		qu.	kl.		qu.	kl.	
D	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$0 \text{ bis } \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\infty \text{ bis } 0$	∞	∞

qu. = wellenmechanisch. kl. = korrespondenzmäßig

Intensität

Abhängigkeit der Intensität von v^1 und n_2 bzw. v

Spektrum Abhängigkeit von bei festgehaltenem	Diskret			Kontinuierlich		
	v		n_2	v		v
	qu.	kl.		qu.	kl.	
v klein	$\frac{1}{v^2}$	$\frac{1}{v^2}$	$\frac{1}{n_2^3}$	$\sim \frac{1}{n_2^3}$	$\frac{1}{n_2^3}$	$\frac{1}{v^2}$
v groß	$\frac{1}{v^3}$	$\frac{1}{v^3}$	$\frac{1}{n_2^3}$	$\frac{1}{v^3}$	$\frac{1}{n_2^3}$	$\frac{1}{v^3}$
v klein	—	—	—	—	—	—

1) $v \equiv v_1$ (Elektronengeschwindigkeit).

2) Nimmt ab bei wachsendem v , $< \frac{1}{v^3}$ = schwächere Änderung mit v als bei $\frac{1}{v^3}$, \sim ungefähr, $h \nu_0 = \frac{m}{2} v^2$.

sind auf Grund der für $|n_1| \ll |n_2|$, $|n_1| \ll 1$ gültigen Formel (44) gezeichnet. Die Kurve $n_2 = \infty$ ist dieselbe wie in A, Fig. 4. Die Kurven $n_2 = 1, 2, 3$ schließlich wurden genau berechnet. Für hohe Spannungen wird $D = 0$, wie es (44) und (49) verlangen. Für niedrige Spannungen werden beim diskreten Spektrum die in Fig. 2 aufgetragenen Werte erreicht (in Fig. 7 gestrichelt). In Fig. 8 ist die Polarisation $P = \frac{1-D}{1+D}$

für das diskrete Spektrum aufgetragen. Hier ist längs der gestrichelten Kurven n_1 festgehalten und n_2 als Abzisse gewählt. Die Figur stellt gewissermaßen eine Fortsetzung von A, Fig. 5 über $\nu = \nu_0$ hinaus dar, verallgemeinert für beliebige Größenordnung von $|n_1|$. Ein genauer Vergleich mit der klassischen Theorie ist hier nicht möglich, da die Polarisation für den allgemeinen Fall, soweit mir bekannt ist, nicht berechnet worden ist.¹⁾ Doch ergibt sich, aus dem in den vorhergehenden Abschnitten Gesagten, daß die klassische Depolarisation im allgemeinen zu groß sein würde.

Schließlich sei noch eine tabellarische Übersicht der Ergebnisse von §§ 5–7 gegeben. Statt der in der zweiten Tabelle auftretenden Logarithmen $\lg \nu$ und $\lg \nu$ haben wir uns $\lg \frac{\nu}{\nu_0}$ und $\lg \frac{\nu}{\nu_0}$ geschrieben zu

denken, wobei $\frac{\nu}{\nu_0}$ und $\frac{\nu}{\nu_0}$ dann reine Zahlen sind. Diese Schreibweise ist in der Tabelle nur vermieden worden, um nicht den Anschein zu erwecken, daß es sich in den verschiedenen Fällen immer um dasselbe ν_0 bzw. ν_0 handelt. Die für den Fall großer c_1 in der zweiten Tabelle angegebene Intensitätsabhängigkeit gründet sich auf die einfache Formel (40a), von deren fragwürdiger praktischer Bedeutung schon bei ihrer Ableitung die Rede war.

§ 9. Die Anwendung des Korrespondenzprinzips von Wentzel

In einer hier schon zitierten Arbeit hat G. Wentzel eine korrespondenzmäßige Theorie des kontinuierlichen Spektrums gegeben, die von der Kramersschen wesentlich abweicht. Wentzel gewinnt die Strahlung, die von einem Elektronensprung herrührt, nicht aus der klassischen Strahlung eines Elektrons, das sich in der Anfangsbahn bewegt. Er benutzt vielmehr eine Hyperbelbahn gleicher numerischer Exzentrizität wie die Anfangsbahn, die energetisch zwischen Anfangs- und Endbahn liegt. Im Falle kleiner Frequenzen fällt die Zwischenbahn natürlich praktisch mit der Anfangsbahn zusammen, so daß hier Übereinstimmung mit Kramersscher und wellenmechanischer Theorie besteht. Die Festsetzung für die Energie der Zwischenbahn ist so getroffen, daß für das kurzwellige Randgebiet des Spektrums Zwischen- und Endbahn nahezu gleiche Energie haben. Die Zwischenbahnen sind also in diesem Falle Hyperbeln mit kleiner Energie, also großem Kernabstande, deren Ausstrahlung gering ist. An der kurzwelligen Grenze selbst wird die Intensität 0.

Drücken wir die Intensität in der durch (14) vereinbarten Schreibweise durch eine Funktion $g = g'$ aus, so ergibt sich:

$$(65) \quad g'' = \frac{n_1}{n_2} \sqrt[3]{\frac{(n_1 + n_2)^2}{4 n_1 n_2}} \cdot g'(\gamma_1) \quad \text{mit} \quad \gamma_1 = |n_1 - n_2|.$$

1) Die klassische Polarisation ließe sich leicht im Anschluß an Wentzel (a. a. O.) ausrechnen.

Die Funktion g' ist durch (27) gegeben. Die Abweichung von der Kramersschen Intensität $g'(\gamma_0)$ besteht also einmal in einem zusätzlichen Faktor und zweitens darin, daß das durch (64) gegebene γ_0 durch γ_1 zu ersetzen ist. Während der letzte Umstand wenig zu sagen hat, hat der zusätzliche Faktor eine starke Abnahme der Intensität mit wachsender Frequenz zur Folge, da sein Wert sich zwischen 1 (für kleine Frequenzen) und 0 (an der kurzwelligen Grenze) bewegt. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zur Kramersschen und zur wellenmechanischen Theorie, die beide nur eine geringe Frequenzabhängigkeit der Intensität liefern. In Fig. 4 ist die nach der Wentzelschen Methode gewonnene Intensität als strichpunktierte Kurve eingetragen.

Aus den angegebenen Ergebnissen der Anwendung des Korrespondenzprinzips nach Wentzel ist zu ersehen, daß die mit dieser Methode gewonnenen Resultate schlecht mit den wellenmechanischen übereinstimmen. Wenn auch, wie z. B. Fig. 4 zeigt, die absoluten Abweichungen von der wellenmechanischen Intensität kleiner sein können als bei Anwendung der Kramersschen Methode, so ist doch der gesamte Intensitätsverlauf, insbesondere das Verschwinden der Intensität an der kurzwelligen Grenze, sehr viel weniger befriedigend als bei Kramers.

§ 10. Zur Anwendung der Kramersschen Theorie auf die Absorption in Sternatmosphären

Eddington¹⁾ hat die Kramerssche Theorie dazu herangezogen, die aus astrophysikalischen Daten folgenden Werte für die Undurchsichtigkeit (opacity) von Sternatmosphären zu erklären. Dabei hat die Theorie Werte geliefert, die etwa um den Faktor 10 zu klein sind. Es könnte nun die Vermutung nahe liegen, daß diese Unstimmigkeit sich behebt, wenn man statt der Kramersschen die wellenmechanische Theorie anwendet.

Eddington behandelt den Fall des Eisens in Capella; das fast vollständig ionisierte Eisenatom, das nur noch die beiden K -Elektronen enthält, wird durch einen nackten Kern mit der Ladung $Z = 24$ ersetzt. Wegen der starken Ionisation spielen die kontinuierlich-diskreten Übergänge die ausschlaggebende Rolle. Die Energie eines Elektrons mit $|n_1| = 1$ ist $\frac{Z^2 e^2}{2a} \sim 1,3 \cdot 10^{-8}$ Erg. Die mittlere kinetische Energie der

Elektronen ist bei $T = 7,2 \cdot 10^6$: $\frac{3}{2} k T \sim 1,5 \cdot 10^{-9}$ Erg. Es handelt sich also um verhältnismäßig langsame Elektronen ($|n_1| > 1$). Wie aus Fig. 6 zu ersehen ist, weichen für den betrachteten Fall weder g noch g' wesentlich von 1 ab. Die starke Absorption in den Sternatmosphären läßt sich daher durch die Wellenmechanik ebenso wenig erklären wie durch die Kramerssche Theorie. Der theoretische Absorptionskoeffizient wird im wichtigen Frequenzbereich durch die Kramerssche Theorie richtig geliefert.

Diese Feststellung hat schon Gaunt²⁾ im Anschluß an die erwähnte Arbeit von Oppenheimer gemacht.³⁾

1) A. S. Eddington, a. a. O., §§ 158, 163, 164.

2) I. A. Gaunt, Ztschr. f. Phys. 59. S. 508. 1930.

3) Inzwischen hat sich eine andere Möglichkeit ergeben, die Unstimmigkeit im Werte des Opazitätskoeffizienten zu beheben: A. Unsöld, Ztschr. f. Astrophys. 3. S. 81. 1931; R. D'E. Atkinson, Ap. J. 73. S. 250. 1931. Vgl. auch A. S. Eddington, a. a. O. § 168.

Zusammenfassung

Bei der Bremsung von Elektronen am nackten Atomkern wird ein kontinuierliches und ein diskretes Spektrum ausgestrahlt.

Im Anschluß an die wellenmechanischen Rechnungen von A. Sommerfeld und W. Gordon wird für Intensität und Polarisation dieser Spektren ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der Wellenmechanik und der korrespondenzmäßigen Theorie von Kramers durchgeführt. Hierbei ergibt sich Übereinstimmung beider Theorien immer dann, wenn die betrachteten Frequenzen klein sind gegenüber der Kantenfrequenz des betrachteten „Atoms“. In den übrigen Fällen sind die Ergebnisse beider Theorien verschieden, die Abweichungen sind besonders für hohe Elektronengeschwindigkeiten beträchtlich. Dabei liefert die Kramerssche Theorie die größere Intensität. Die korrespondenzmäßige Behandlung des kontinuierlichen Spektrums von Wentzel stimmt zwar in den Ergebnissen für kleine Frequenzen auch mit der Wellenmechanik überein. Doch gibt sie im Gegensatz zur Kramerschen Theorie die spektrale Intensitätsverteilung nicht gut wieder.

Anhang (Noten 1—3)

1. Das Vorzeichen von $n_{1,2}$ oder kurz n (im folgenden lassen wir Indizes weg) soll so festgelegt werden, daß die unseren Rechnungen zugrunde gelegte kontinuierliche Eigenfunktion ψ_1 [vgl. A (55)] formal mit einer der üblichen diskreten Eigenfunktionen in parabolischen Koordinaten übereinstimmt und sich also von dieser nur dadurch unterscheidet, daß n und k nicht reell, sondern imaginär sind. Die allgemeine diskrete Eigenfunktion mit der magnetischen Quantenzahl $m = 0$ lautet, wenn wir k und n positiv reell wählen, nach C, Kap. II, § 2, Gl. (12), (13) und (10)

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = e^{-\frac{k}{2}(\xi + \eta)} L_{\lambda_1}(k\xi) L_{\lambda_2}(k\eta) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = n. \end{array} \right.$$

Das ξ^2, η^2 in C entspricht unserem ξ, η , das n_i unserem λ_i . Soll, wie in ψ_1 nur ein L , das im Argument η enthält, auftreten, so haben wir zu wählen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = n - 1,$$

was ergibt

$$(B) \quad \psi = e^{-\frac{k}{2}(\xi + \eta)} L_{n-1}(k\eta).$$

Hieraus wird mit Hilfe der Beziehung A (46a)

$$(C) \quad \psi = e^{-\frac{k}{2}(\xi - \eta)} L_{-n}(-k\eta).$$

Soll nun (C) die kontinuierliche Eigenfunktion ψ_1 darstellen, so haben wir, wie ein Vergleich mit A (55) und (2) zeigt, n positiv imaginär und k negativ imaginär zu nehmen. Durch unsere am Anfang der Note aufgestellte Forderung und die Festsetzung, daß n im diskreten Falle positiv reell sein soll, ist also das Argument der komplexen Zahl n im kontinuierlichen Falle eindeutig festgelegt. Das entsprechende gilt für k , wobei hier allerdings die für das Argument von k im diskreten getroffene Wahl nicht so zwingend ist wie bei n . Unsere Wahl für k und n stimmt mit Gordon überein.

2. Es soll nun angedeutet werden, wie man die Matrixelemente (2) für die kontinuierlich-diskreten Übergänge aus den Ergebnissen von Gordon gewinnt.¹⁾ Ein stationärer Zustand des diskreten Spektrums ist durch die drei Quantenzahlen λ_1, λ_2, m festgelegt, die sämtlich reell sind und zwischen denen die Beziehung $\lambda_1 + \lambda_2 + m + 1 = n_2$ besteht, wenn n_2 die zugehörige Hauptquantenzahl bedeutet. Ihnen entsprechen für unsere kontinuierliche Eigenfunktion die Quantenzahlen $0, n_1 - 1, 0$, wie in Note 1 gezeigt wurde. Die ausgezeichnete Achse ist bei Gordon die z -Achse, bei uns die x -Achse. Beachten wir außerdem die Auswahlregel für die magnetische Quantenzahl m , so sind also die von uns benötigten Matrixelemente

$$(A) \quad M_x \sim 2\pi \cdot z_{\lambda_1, \lambda_2, 0}^{0, n_1 - 1, 0} \quad \text{und} \quad \pm i M_z = M_y \sim 2\pi \cdot x_{\lambda_1, \lambda_2, \pm 1}^{0, n_1 - 1, 0},$$

wenn wir die Bezeichnungsweise von G verwenden. Der Faktor 2π rührt davon her, daß wir über φ integrieren, während Gordon mittelt. Daß wir in (A) kein Gleichheitszeichen schreiben, soll andeuten, daß die Normierungsfaktoren in den Ausdrücken von Gordon wegzulassen sind, da wir ψ_1 in besonderer Weise normiert haben. Den Normierungsfaktor für ψ_2 übernehmen wir aus G. Er ist

$$(B) \quad N_2^2 = \frac{1}{2\pi} N_m^2(\lambda_1, \lambda_2)$$

und gibt nach G (30) unsere Gl. (7). Bei der Ausrechnung von (A) verwendet man für die in G auftretenden Ausdrücke $J_e^{(0,0)}(n, n')$, wenn n oder n' gleich Null ist, G (25), wo $F = 1$ wird. Sind n und n' von Null verschieden, so benutzt man zweckmäßig G (25b), weil das dort auftretende Argument $1 - u^2$ von F mit $u = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$ mit unserem x in (2) schon übereinstimmt. Hierdurch vermeidet man unnötige Umformungen der hypergeometrischen Funktionen.

Die einzige Umformung, die wir anzuwenden haben — und zwar bei M_x und M_z je einmal —, um zu unserer Form (2) für die Matrixelemente zu gelangen, ist durch die Formel gegeben

$$(C) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta - 1, \gamma, x) + \frac{x}{\beta - 1} F'(\alpha, \beta - 1, \gamma, x).$$

Der ' deutet eine Differentiation nach x an. (C) ergibt sich unmittelbar aus der bekannten Reihe für F [vgl. z. B. A (93b)].

Es ist noch zu bemerken, daß Gordon von seinen Eigenfunktionen ein Verschwinden im Unendlichen verlangt. Diese Bedingung erfüllt unser ψ_1 nicht. Trotzdem sind die Ergebnisse von G für uns anwendbar. Die Konvergenz der Integrale ist durch das Verhalten von ψ_2 gesichert.

1) Hinweise auf diese Arbeit sind im folgenden mit G bezeichnet.

3. Es sollen jetzt die Gl. (1) für den in § 7 benötigten Grenzfall $n_2 \rightarrow n_1$ spezialisiert werden.

Die drei in (1) auftretenden F -Funktionen sind, unter Verwendung der in § 7 definierten Größen n und ε geschrieben:

$$(A) \quad \begin{cases} F_1 = F(1 - in, 1 + i\bar{n}, 1, x) \\ F_2 = F(1 - in, 1 + i\bar{n}, 2, x) \\ F_3 = F(1 - in, 2 + i\bar{n}, 2, x) \end{cases} \quad \bar{n} = n(1 + \varepsilon)$$

Da wir vermuten (vgl. § 7), daß das Verhalten der Funktionen in der Nähe von $x = 1$ allein für unsere Resultate ausschlaggebend wird, drücken wir sie durch F -Funktionen mit dem Argument $z = 1 - x$ aus. In diesen neuen F -Funktionen ist dann das Verhalten in $z = 0$ wichtig, das durch die bekannte Reihe gegeben ist. Führen wir die Umformung aus, so erhalten wir¹⁾:

$$(B) \quad \begin{cases} F_1 = \frac{\Gamma(-1 - in\varepsilon)}{\Gamma(in)\Gamma(-i\bar{n})} F(1 - in, 1 + i\bar{n}, 2 + in\varepsilon, 1 - x) \\ \quad + \frac{\Gamma(1 + in\varepsilon)}{\Gamma(1 - in)\Gamma(1 + i\bar{n})} (1 - x)^{-1 - in\varepsilon} F(in, -i\bar{n}, -in\varepsilon, 1 - x), \\ F_2 = \frac{\Gamma(-in\varepsilon)}{\Gamma(1 + in)\Gamma(1 - i\bar{n})} F(1 - in, 1 + i\bar{n}, 1 + in\varepsilon, 1 - x) \\ \quad + \frac{\Gamma(in\varepsilon)}{\Gamma(1 - in)\Gamma(1 + i\bar{n})} (1 - x)^{-in\varepsilon} F(1 + in, 1 - i\bar{n}, 1 - in\varepsilon, 1 - x), \\ F_3 = \frac{\Gamma(-1 - in\varepsilon)}{\Gamma(1 + in)\Gamma(-i\bar{n})} F(1 - in, 2 + i\bar{n}, 2 + in\varepsilon, 1 - x) \\ \quad + \frac{\Gamma(1 + in\varepsilon)}{\Gamma(1 - in)\Gamma(2 + i\bar{n})} (1 - x)^{-1 - in\varepsilon} F(1 + in, -i\bar{n}, -in\varepsilon, 1 - x). \end{cases}$$

Gemäß unserer in § 7 getroffenen Verabredung vernachlässigen wir Glieder, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ endlich bleiben. Wir bezeichnen solche Glieder im folgenden kurz als endlich bleibende Glieder.

Geht $\varepsilon \rightarrow 0$, so geht in (A) $\bar{n} \rightarrow n$ und $x \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ [vgl. (56)].

Da die F -Funktionen in (A) für $n = \bar{n}$ regulär sind, kann ein Wachsen über alle Grenzen nur dadurch zustande kommen, daß $x \rightarrow 1$ geht. Die in Einzelgliedern von (B) auftretenden Singularitäten für $\varepsilon = 0$, $x \neq 1$ müssen sich daher irgendwie kompensieren und brauchen im folgenden nicht berücksichtigt zu werden. Nach dieser Feststellung können wir in den Ausdrücken (B) jeweils den ersten der beiden Summanden weglassen, da die F -Funktionen in $x = 1$ regulär sind.

Im zweiten Summanden von F_2 entwickeln wir:

$$(C) \quad (1 - x)^{-in\varepsilon} = 1 - in\varepsilon \lg(1 - x)$$

und können das von der 1 in dieser Entwicklung herrührende Glied in F_2 weglassen, da es nicht von x abhängt. Dann bleibt für F_2 nur noch ein Glied stehen, das $\lg(1 - x)$ als Faktor enthält und also für $x \rightarrow 1$ logarithmisch unendlich wird. Bei der später auszuführenden Integration über α liefert F_2 nur einen endlichen Beitrag, da ein Integral, dessen Integrationsweg in eine logarithmische Unendlichkeitsstelle hinein-

1) Vgl. z. B. Whittaker and Watson, Modern Analysis 14.53.

läuft, nicht divergiert. F_2 ist also für das Endresultat in unserer Näherung nicht mehr wesentlich, und wir vernachlässigen es.

Im zweiten Summanden von F_1 entwickeln wir die F -Funktion und setzen $(1-x)^{-in\epsilon}$ sofort gleich 1, da das logarithmische Entwicklungsglied in (C) aus demselben Grunde wie bei F_2 unwesentlich ist. Dann erhalten wir für F_1 , wenn wir in den Gammafunktionen $\epsilon = 0$ setzen:

$$(D) \quad F_1 = \frac{1}{\Gamma(1-in)\Gamma(1+in)} \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{i\bar{n}}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} O(1-x) \right\}.$$

Hier können Glieder wegleiben, die für $x = 1$ endlich bleiben, und es ergibt sich:

$$(E) \quad F_1 = \frac{1}{|\Gamma(1+in)|^2} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Entsprechend erhalten wir:

$$(F) \quad F_3 = \frac{1}{|\Gamma(1+in)|^2} \cdot \frac{1}{1+in} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Hiermit wird aus den Gleichungen (1):

$$(G) \quad \begin{cases} |M_x| = |C| \cdot |m_x| = |C| \cdot \frac{n(1-\cos\alpha)}{|\Gamma(1+in)|^2} \cdot \frac{1}{1-x}, \\ |M_z| = |C| \cdot \sin\beta \cdot |m_z| = |C| \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \frac{n}{|\Gamma(1+in)|^2} \cdot \frac{1}{1-x}. \end{cases}$$

Zum Schluß möchte ich meinem verehrten Lehrer, Hrn. Professor Sommerfeld, der mir das Thema zu dieser Arbeit gestellt hat, auch an dieser Stelle herzlich danken.

(Eingegangen 21. Dezember 1931)

Untersuchungen an Ultrakurzwellenröhren

Von H. Collenbusch

(Mit 16 Figuren)

Inhaltsübersicht: Einleitung. — I. Experimenteller Teil: 1. Experimentelle Fragestellungen; 2. Senderanordnung; 3. Schaltung und verwendete Apparate; 4. Meßanordnung zur Bestimmung der Schwingleistung; 5. Meßanordnung zur Bestimmung der Wellenlänge; 6. Untersuchte Röhren; 7. Die auftretenden Wellen, ihre Polarisation und Energieverteilung; 8. Messungen an Röhren mit Lecherdrahtschwingungen: a) Orientierende Messungen; b) Messungen mit der Röhre Nr. 241; c) Versuche mit Röhren Nr. 240, 249; 9. Messungen an Röhren mit Spiralschwingungen; 10. Weitere Messungen an Röhren mit Spiralschwingungen; 11. Weitere Messungen über den Einfluß der Glüh-elektronenemission; 12. Versuche mit Glühkathoden im Gitteranodenraum; 13. Schwingungserzeugung mit Zweielektrodenröhren im homogenen Magnetfeld: Einleitung; a) Senderanordnung; b) Ergebnisse orientierender Messungen; c) Messungen an der Röhre Nr. 221. — II. Zusammenfassende und theoretische Betrachtungen: 1. Die zur Erregung kommenden Schwinggebilde; 2. Die für die Schwingungserzeugung charakteristischen Befunde: a) Der auftretende Anodenstrom; b) Errechnete Laufzeiten und Schwingungsdauern; 3. Die auftretenden Wellenlängenänderungen durch die Betriebsdaten: a) Die Abhängigkeit von der Emission; b) Die Abhängigkeit von den Spannungen; 4. Die Schwingungen im Magnetfeld. — Zusammenfassung und Schluß.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit stellt einen weiteren Beitrag zu den Untersuchungen über die Erzeugung von Ultrakurzwellen dar, die in den letzten Jahren von K. Kohl in Erlangen in Zusammenarbeit mit der Firma Tekade Nürnberg in Angriff genommen wurden. Die Meßergebnisse beziehen sich auf eine Auswahl charakteristischer Kurzwellenröhren nach K. Kohl, bestehend aus Kathode, Gitter und Anode in der Barkhausenschaltung bzw. Zweielektrodenröhren mit zusätzlichem Magnetfeld.

Ziel der experimentellen Arbeit war es, einerseits einen Beitrag zur Erklärung des die Schwingungen erzeugenden Elektronenmechanismus zu liefern; andererseits mit den gewonnenen Erkenntnissen elektromagnetische Schwingungen möglichst hoher Frequenz zu erzielen und somit das Gebiet der kürzesten ungedämpften Wellen für die mannigfachen Bedürfnisse von Wissenschaft und Praxis zu erschließen.

I. Experimenteller Teil

1. Experimentelle Fragestellungen

Es wurde der Einfluß von Form und Größe der Elektroden auf die erzeugten Schwingungen untersucht. Weiterhin wurde der Gesamteinfluß der Betriebsdaten, nämlich der Heizung der Glühkathode, der Spannungen zwischen den Elektroden bzw. der Magnetfeldstärke auf Wellenlänge und Energie der Schwingungen untersucht. Den Extremwerten der Betriebsdaten für das Auftreten der Schwingungen, nämlich der kleinsten, günstigsten und größten Elektronenemission bzw. kleinsten, günstigsten und größten Spannung an den Elektroden wurde besondere Beachtung geschenkt. Schließlich wurden zusätzliche Glühkathoden und Hilfelektroden in die Röhren eingebaut, um damit weiteren Aufschluß über den Elektronenmechanismus zu gewinnen.

2. Senderanordnung

Die Senderanordnung für die Dreielektrodenröhren war folgendermaßen getroffen: In die Zuführungen des Heizkreises waren Hochfrequenzdrosseln gelegt. Die Zuleitungen zu Gitter und Anode, deren Länge die Wellenlänge zuweilen mitbestimmte, wurden mit einem Paralleldrahtsystem und beweglicher Abstimmplatte verbunden. Die Metallplatte war wegen der vorhandenen Spannungen unterteilt und durch einen Kurzschlußkondensator für die Hochfrequenz überbrückt. Die Röhren konnten auf diesem Sender sehr leicht ausgetauscht werden.

3. Schaltung und verwendete Apparate

Die verwendete Schaltung ist die sogenannte Bremsfeldschaltung mit positiver Spannung am Gitter und schwach positiver bzw. negativer Spannung an der Anode. Für die Heizung der Glühkathode wurden zur Erzielung möglicher Konstanz Heizbatterien von etwa 50 Amperestunden Kapazität verwendet. Als Spannungsquelle für Gitter und Anode stand eine Hochspannungsbatterie von 600 Volt Spannung zur Verfügung. Außerdem war noch eine Netzgleichspannung von 440 Volt vorhanden.

4. Meßanordnung zur Bestimmung der Schwingleistung

Für die Strahlungsmessung wurde ein abstimmbarer Dipol, in dessen Mitte ein Tantal-Silicium-Detektor angeordnet war, verwendet. Die auftretenden Gleichspannungen am Detektor wurden mittels eines Millivoltmeters von Siemens & Halske gemessen. Der Meßbereich ging bis 15 mV mit 0,1 mV Teilung. Nur bei ganz kleinen Strahlleistungen wurde ein Spiegelgalvanometer von wesentlich größerer Empfindlichkeit (1 Teil = $2,04 \cdot 10^{-8}$ Volt) gewählt.

5. Meßanordnung zur Bestimmung der Wellenlänge

Die Wellenlängen wurden mit einem Lecherschen Drahtsystem gemessen. Die Ankoppelung an die Röhre bzw. an den abgestimmten Resonator geschah durch die aufgebogenen Enden des Lechersystems.

Zur möglichst genauen Wellenlängenmessung wurde die günstigste Koppelung zwischen Lechersystem, Röhre und Resonator aufgesucht, bei der die Resonanzlagen möglichst scharf waren. Das Lechersystem wurde möglichst lose mit dem Sender gekoppelt, um eine Rückwirkung zu vermeiden. Die Wellenlänge wurde aus dem Abstand der Resonanzstellen bestimmt; insbesondere konnte durch Auszählen einer größeren Anzahl von Resonanzstellen eine relativ gute Genauigkeit erzielt werden. Die erreichte absolute Genauigkeit betrug 1 mm, bei sorgfältigen Untersuchungen $\frac{1}{10}$ mm.

6. Untersuchte Röhren

Von den näher vermessenen Röhren sind in Tab. 1 die wichtigsten Abmessungen aufgeführt. Es sind nur Röhren mit zylindrischen Elektroden vermessen worden, da diese die beste Energie lieferten. L bedeutet die Länge des Anodenzylinders, r_0 den Heizfadenradius, r_1 den Gitterradius, r_2 den Anodenradius.

Tabelle 1

Röhre Nr.	L cm	r_0 cm	r_1 cm	r_2 cm	Windungen
240, 241	2,0	0,01	0,1	0,5	kurzgeschl.
249	3,0	0,01	0,15	0,5	"
184, 185	1,5	0,01	0,3	0,75	14 Wdg.
202, 242	1,5	0,01	0,3	0,75	"
199, 221	2,5	0,01	0,45	1,1	"
109	1,5	0,01	0,15	0,4	"
168	1,5	0,01	0,15	0,6	"
279	1,5	0,01	0,15	0,9	"
252	1,5	0,01	0,15	0,9	"
56	—	0,01	0,15	—	"

Das Gitter ist mit Ausnahme von Röhre Nr. 56, deren Spannungselektrode aus zwei Hohlzylindern von 3 mm Durchmesser besteht, von einer Molybdän- bzw. Wolframdrahtspirale gebildet, deren Windungen nur bei den Röhren 240, 241 und 249 metallisch überbrückt sind. Bei den übrigen Röhren besteht das Gitter im Anodenzylinder aus einer nicht überbrückten Spirale, die außerhalb der Anode durch einen Nickelbügel kurzgeschlossen ist. Der geschlossene Gitterspiralenkreis konnte in seiner Grund- und in einem Falle im Magnetfeld auch in seiner Oberwelle erregt werden. War die Spirale in der Mitte unterbrochen, so trat eine etwa doppelt so lange Welle auf. Es gelang, solche Drahtkreise bis herab zu einer Wellenlänge von 4,7 cm ungedämpft zu erregen. Die Anode war meist aus einem Nickelblechzylinder hergestellt. Die in Tab. 1 aufgeführten Röhren besitzen sämtlich Wolframkathoden, die bei etwa 2 Amp. Heizstromstärke Elektronen auszusenden beginnen.

Wurden die Drahtspiralen dieser Röhren zu Schwingungen im Magnetfeld angeregt, so war die Anode ohne wesentlichen Einfluß; sie wurde deshalb meistens isoliert.

7. Die auftretenden Wellen, ihre Polarisation und Energieverteilung

Wurden die oben beschriebenen Drahtkreise erregt, so war die Welle in der durch den Bügel der Gitterspirale definierten Ebene linear polarisiert. Die Wellenlänge war in diesem Falle durch die Zuleitungen nicht meßbar zu ändern. Die Gitteranodenzuleitung wurde dabei so abgestimmt, daß eine günstige Strahlleistung erzielt wurde. Neben diesen Schwingungen zeigten alle Röhren auch Schwingungen, bei denen die Zuleitungen sowie die durch Gitter und Anode gebildete Kapazität für die Schwingungen maßgebend waren. Die auftretenden Wellen waren meist senkrecht zu obigen polarisiert. Häufig zeigten sich Koppelschwingungen zwischen den oben erwähnten Drahtkreisen und den Zuleitungen, besonders auch den Heizzuleitungen. Die gemessenen Wellen waren dann länger als die Eigenwelle der Spirale und von der Zuleitungslänge etwas abhängig.

Bei allen auf den Zuleitungen auftretenden Schwingungen zeichneten sich ganz besonders diejenigen durch große Energie aus, bei denen die wirksame Betriebskapazität die Kapazität zwischen Gitter und Anode war. Die wirksame Selbstinduktion wurde dann durch die Zuleitung zu diesen beiden Elektroden gebildet (Lecherisches Paralleldrahtsystem). Diese Schwingungen wurden auch näher studiert; sie sind im folgenden kurz mit Lecherdrahtschwingungen bezeichnet.

8. Messungen an Röhren mit Lecherdrahtschwingungen

a) Orientierende Messungen

Mit den in der Tab. 1 aufgeführten Röhren Nr. 184, 185, 109 und 199 wurden eine große Reihe orientierender Messungen durchgeführt, insbesondere wurde die Abhängigkeit der erzeugten Wellenlängen von der Lecherdrahtlänge untersucht und ähnliche Ergebnisse wie von Hollmann (6) und Strutt (10) erhalten. Die erzeugten Wellen konnten trotz Nachregulierung der Betriebsdaten nur in einem schmalen Bereich geändert werden. Die Untersuchungen über die Abhängigkeit der Wellenlänge von den Betriebsdaten, der Gitter- und Anodenspannung und der Emission lieferten ganz ähnliche Ergebnisse wie die Messungen von Hornung (7), nur daß entsprechend den kürzeren Wellenlängen kleinere Änderungen gemessen wurden. Abweichend zeigten jedoch einige Röhren, Röhre Nr. 184 und 185, eine Zunahme der Wellenlänge mit steigender Emission.

b) Messungen mit der Röhre Nr. 241

Ein wesentlich breiteres Frequenzband konnte schließlich mit Röhren der Type 241 erzielt werden, die eine sehr

geringe Sockelkapazität und ein Radienverhältnis $\frac{r_2}{r_1} > 2,5$ hatten. Mit der Röhre Nr. 241, bei der $\frac{r_2}{r_1} = 5$ war, konnten Wellen von $\lambda = 28$ bis 120 cm lückenlos erzeugt werden.

Die in Fig. 1 dargestellten Kurven wurden folgendermaßen gemessen: Für jede eingestellte Lecherdrahtlänge wurden die Betriebsdaten auf die günstigste Schwingungsleistung eingestellt. Bei $\lambda = 60$ cm war die günstigste Emission größer als 60 mA (vgl. Fig. 2). Um die Röhre nicht zu zerstören, wurde diese Emission nicht überschritten. Es gelang auf diese Art, das Lechersystem in der Grundwelle, dann aber auch in Oberwellen bis zur vierten Oberwelle zu erregen.

Mit abnehmender Wellenlänge nahmen die Betriebsdaten der Röhre so zu, daß bei $\lambda = 28$ cm die Grenze der Belastbarkeit erreicht wurde. Die langwellige Grenze war dadurch gegeben, daß mit zunehmender Wellenlänge die Energieaufnahme abnahm. Es wurden nicht nur die Betriebsspannungen sehr klein, sondern auch die günstigste Emission wurde sehr klein und betrug bei $\lambda = 115$ cm nur noch 4 mA.

Es wurde ferner die Energieverteilung innerhalb des Wellenbereiches von $\lambda = 28$ —120 cm mit einem jeweils abgestimmten Resonator als Empfänger in konstanter Entfernung (2 m) vom Sender gemessen und festgestellt, daß für $\lambda = 45$ cm ein scharfes Maximum der Strahlungsenergie vorhanden ist.

Waren die Betriebsspannungen der Röhre nicht für die günstigste Strahlleistung eingestellt, so wurde damit zugleich die Wellenlänge verändert. Bei diesen abweichenden Betriebsspannungen traten ebenfalls Energiemaxima auf. Die Wellen für einige derartige Maxima sind in Fig. 1 eingezeichnet (vgl. auch Fig. 8).

Fig. 2 gibt die optimalen Betriebsdaten der Röhre Nr. 241 für die Wellen im Bereich von $\lambda = 28$ —65 cm an, wie sie gemäß Fig. 1 in Abhängigkeit von der Lecherdrahtlänge erhalten wurden. Dabei be-

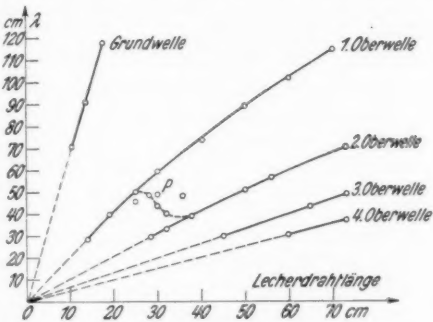


Fig. 1. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung $\lambda = f(L)$ bei bester Angleichung von e_g ; e_a ; i_e max = 60 mA

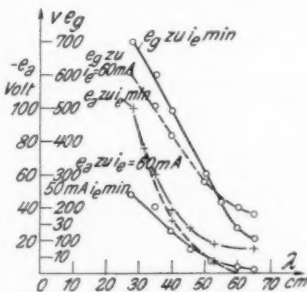


Fig. 2. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für E max: $e_g = f_1(\lambda)$; $e_a = f_2(\lambda)$; i_e min $f_3(\lambda)$

deutet i_{\min} die Emission, bei der die Röhre zu schwingen beginnt. Die günstigste Gitter- bzw. Anodenspannung ist einmal für die Anfangsemission (ausgezogene Kurven), dann aber für die höchste aufgewandte Emission von 60 mA (gestrichelte Kurven) angegeben. Während die Röhre bei $\lambda = 65$ cm schon bei einer Emission von 2 mA zu schwingen beginnt, beträgt bei $\lambda = 28$ cm die Emission für den Schwingungsbeginn nahezu 50 mA.

Um die Wertpaare von e_g und e_a , bei denen Schwingungen existieren, möglichst vollständig zu erfassen, wurden bei konstanter Wellenlänge und jeweils konstanter Emission einmal die Wertpaare aufgesucht, bei denen die Schwingungen gerade einsetzen, dann die Wertpaare, bei denen die Schwingungsenergie E bei konstantem e_g in Abhängigkeit von e_a ein Maximum wird. Die Kurven $E = 0$ schließen dann das Schwinggebiet ein, das von der erwähnten Kurve E_{\max} durchsetzt ist. Da für die kleinste Emission, bei der Schwingungen auftreten nur ein Spannungspaar existiert, schrumpft ein solcher Schwingungsbereich mit abnehmender Emission zu einem Punkt zusammen.

In Fig. 3 sind die Kurven $E = 0$, E_{\max} , sowie dieser ausgezeichnete Punkt für die Wellenlänge $\lambda = 45$ cm aufgetragen. Wie die

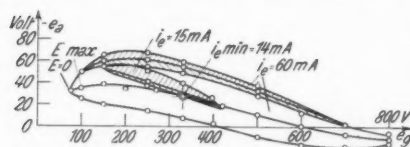


Fig. 3. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 22,0$ cm; e_g , e_a -Bereiche für $i_e = \text{const}$

Emission vorhanden. Der Anodenspannungsbereich beträgt etwa nur 50 Volt. Dies deutet auf eine Beziehung zwischen der Laufzeit der Elektronen im Raum Gitter-Anode und der Schwingungsdauer hin.

Bei höherer Gitterspannung wird die Anodenspannung positiv, was jedoch keinerlei Unstetigkeiten im Verlaufe der Kurven nach sich zieht. Es zeigt sich weiterhin unmittelbar an der Seite der negativen Anodenspannung anschließend merkwürdigerweise ein zweiter Bereich, der seinerseits eine E_{\max} -Kurve aufweist. Bei $\lambda = 60$ cm wurden sogar mehrere solche Bereiche beobachtet.

Die Frage nach den Wellenlängenänderungen innerhalb eines derartigen Bereiches lag nahe. Für die Lecherdrahteinstellung $L = 22,0$ cm wurde für die E_{\max} -Kurve die Wellenlänge gemessen. Fig. 4 zeigt $\lambda = f(e_g)$ mit nachregulierter Anodenspannung. Energieverlauf und Anodenstrom wurden dabei ebenfalls mit aufgenommen. Das Ergebnis dieser Messungen war, daß in einem Bereich von $e_g = 100-700$ Volt die Wellenlänge konstant bleibt. Es war nur eine kleine Abhängigkeit von der Emission zu verzeichnen, und zwar nimmt hier λ mit zunehmender Emission ab. Wie aus den Kurven zu ersehen ist, nimmt bei positiver

beginnt.
anfanga-
gewandte
end die
zwingen
abbeginn

ungen
i kon-
einmal
gerade
gungs-
 e_a ein
n das
durch-
ungen
ft ein
on zu

r aus-
Wie die
, liegt
kleiner
ganz
reiches
Auf-
angge-
ser Be-
Kurven
chwin-
Gitter-
75 bis
0 mA
a nur
it der
n.

v, was
zieht.
noden-
a, der
sogar

es der-
2,0 cm
t zeigt
f und
gebnis
olt die
it von
ender
sitiver

Anode der Anodenstrom stark zu. Bemerkenswert ist ferner, daß die Energie bei positiver Anodenspannung noch ein zweites Maximum besitzt.

Der nächste Schritt war nun, das Verhalten von λ in Abhängigkeit

von der Anodenspannung allein zu untersuchen. Es wurde e_g konstant gehalten und $\lambda = f(e_a)$ untersucht (Figg. 5 u. 6). Es zeigten sich folgende Gesetzmäßigkeiten: Die Wellenlänge nimmt mit negativ werdender Anodenspannung und zunehmender Emission ab. Für das Energiemaximum ist die Wellenlängenänderung durch die Emission am kleinsten. Ferner nimmt die Wellenlängenänderung durch die Emission mit steigender Gitterspannung ab (vgl. Figg. 5 und 6). Das Maximum des Anodenstroms liegt bei stärker positiver Anodenspannung als das Maximum der Energie. Das Energiemaximum liegt für die verschiedenen Emissionen beinahe bei der gleichen Anodenspannung.

In Fig. 7 ist für $L = 15$ cm und $e_g = 500$ Volt die Abhängigkeit der

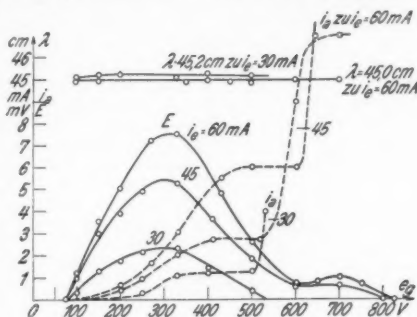


Fig. 4. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 22,0$ cm; e_g opt. $\lambda = f_1(e_a)$; $E = f_2(e_a)$; $i_a = f_3(e_a)$; $i_e = \text{const}$

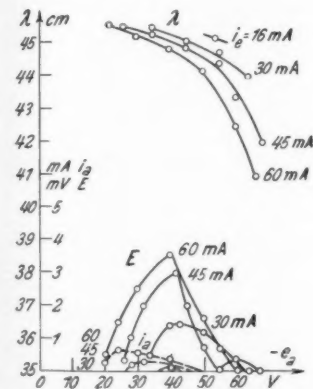


Fig. 5. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 22,0$ cm; $e_g = 150$ Volt; $\lambda = f_1(e_a)$; $E = f_2(e_a)$; $i_a = f_3(e_a)$; $i_e = \text{const}$

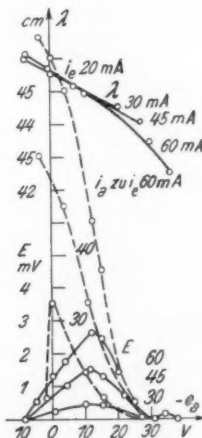


Fig. 6. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 22,0$ cm; $e_g = 500$ Volt; $\lambda = f_1(e_a)$; $E = f_2(e_a)$; $i_a = f_3(e_a)$; $i_e = \text{const}$

Wellenlänge und der Energie von der Anodenspannung und Emission noch dargestellt. Die Wellenlänge läßt sich nur wenig durch die Betriebsdaten ändern. In dem Spannungsbereich von $e_a = 60$ –110 Volt ändert sich λ nur um 5 mm, während bei der gleichen Gitterspannung,

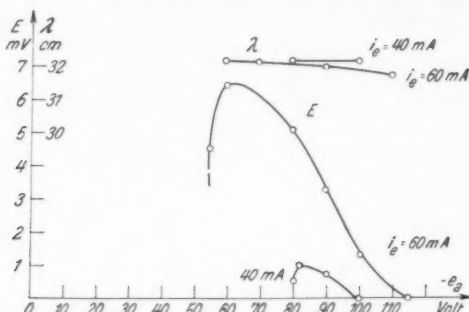


Fig. 7. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 15,0$ cm; $e_g = 500$ Volt; $\lambda = f_1(e_a)$; $E = f_2(e_a)$; $i_a = \text{const}$

aber größerer Lecherdrahtlänge in Fig. 6 λ sich im Bereich von $e_a: +10$ bis -40 Volt um 35 mm ändert. Die Änderung durch die Emission ist ebenfalls kleiner. λ nimmt wieder mit zunehmender Emission ab. Die Schwingungen reißen ferner bei zu hoher positiver Anodenspannung ab. Das Energiemaximum wandert mit steigender Emission nach positiver Anodenspannung hin. Ein Anodenstrom tritt hier nicht auf.

Die Fig. 8 stellt bei Lecherdrahtlänge $L = 30$ cm bei $e_g = 180$ Volt Energie E , Wellenlänge λ und Anodenstrom i_a in Abhängigkeit

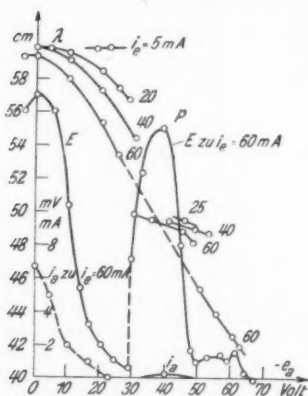


Fig. 8. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = 30$ cm; $e_g = 180$ Volt; $\lambda = f_1(e_a)$; $E = f_2(e_a)$; $i_a = f_3(e_a)$; $i_a = \text{const}$

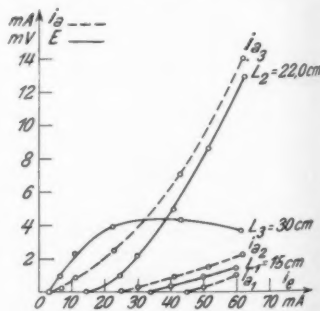


Fig. 9. Röhre Nr. 241. Lecherdrahtschwingung für $L = \text{const}$; $E = f_1(i_a)$; $i_a = f_2(i_a)$; e_g und e_a für $E \text{ max}$ nachreguliert

von der Anodenspannung e_a dar. Um das Bild nicht zu unübersichtlich zu gestalten, wurde E und i_a nur für $i_e = 60$ mA aufgetragen. Neben dem Energiemaximum, das bei $e_a = 180$ Volt und $i_e = 60$ mA bei einer Anodenspannung um Null liegt, zeigt sich noch ein ausgesprochenes zweites Energiemaximum bei $e_a = -40$ Volt (mit P in Fig. 1 bezeichnet). Die hier auftretende Welle zeigt eine viel geringere Abhängigkeit von e_a und i_e als die normale Lecherdrahtschwingung. Die normale Lecherdrahtwelle ist ganz erheblich durch Emission und Anodenspannung abzuändern. Die rechts vom zweiten Energiemaximum gemessenen Wellen gehören sicher noch zu dem normalen Bereich. Bemerkenswert ist, daß ein Ziehen der Welle durch die Betriebsdaten vom Energiemaximum aus nach kürzerer Wellenlänge leichter und weiter möglich ist, als nach längerer Wellenlänge. Hier pflegen die Schwingungen meist abzureißen.

Um schließlich noch zu zeigen, wie sich die Energieaufnahme der Röhre mit der erzeugten Wellenlänge ändert, sind die Kurven in Fig. 9 aufgenommen. Für die drei Lecherdrahteinstellungen $L = 15$, $L = 22$ und $L = 30$ cm wurden die Leistungen bei den günstigsten Betriebsspannungen in Abhängigkeit von der Emission gemessen. Es zeigte sich folgendes: Die Anfangsemission nimmt mit abnehmender Wellenlänge nahezu linear zu. Der Energieanstieg ist für die kurze Welle $\lambda = 30$ cm mit wachsender Emission gering. Für die energiereichste Welle $\lambda = 45$ cm zeigt die Energiekurve noch eine wachsende Steigung bei $i_e = 60$ mA. Für die längste Welle $\lambda = 60$ cm biegt die Energiekurve schon bei 20 mA um. Es gelingt auch nicht, durch Nachregulierung der Betriebsspannung dies zu verhindern.

Die Messungen mit Röhre Nr. 241 zeigen somit zusammenfassend folgendes Ergebnis:

1. Ein definiertes Schwingensystem, bestehend aus einem Lecherdrahtsystem mit der Röhrenkapazität als Endkapazität, ist in Grund- und Oberschwingungen zu erzeugen.
2. Die Betriebsdaten müssen der erzeugten Frequenz angepaßt sein.
3. Die Energie besitzt als Funktion der Wellenlänge ein ausgesprochenes Maximum.
4. Die Spannung des Gitters läßt sich für $L =$ konstant bei genügend hoher Emission in einem weiten Bereich ändern, falls nur die Spannung der Anode nachreguliert wird.
5. Eine Wellenlängenänderung durch die Gitterspannung allein konnte hierbei nicht gemessen werden.
6. Die Anodenspannung vermag die erzeugte Welle in erster Linie nach kürzeren Wellen zu verändern. Am kräftigsten gelingt dies bei hoher Elektronenemission.
7. Die beobachtete Wellenlängenänderung durch die Emission allein war gering und nicht eindeutig; die Änderungen können auch durch Potentialänderungen bedingt sein.
8. Die Wellenlängenänderung der Lecherdrahtwelle ist bei der kürzesten erzeugten Welle klein (etwa 7 Proz.) und nimmt mit zunehmender Wellenlänge zu. Bei $\lambda = 60$ cm ist die Wellenlänge um 30 Proz. durch die Betriebsdaten zu ändern.

c) Weitere Versuche mit Lecherdrahtschwingungen

Bei der Röhre Nr. 240, die ganz genau wie die Röhre Nr. 241 gebaut war, zeigte sich außer den beschriebenen Wellenbereichen noch eine kurze Welle von 19 cm bei auffallend kleinen Betriebsdaten. Die Länge der Zuleitungsdrähte zwischen der Röhre und den Heizdrosseln zeigte sich, neben den Gitter- und Anodenzuleitungen für das Zustandekommen der Welle von Einfluß. Waren die Heizzuleitungsdrähte zu kurz, so konnte die Welle überhaupt nicht erregt werden. Aus der Energieverteilung auf den Zuleitungen war ebenfalls die Beteiligung der Heizleitungen an den Schwingungen zu erschen.

Weiterhin zeigte sich, daß die beobachtete Welle durch die Gitterzuleitung von $\lambda = 17,5$ –20 cm zu ändern war.

Die e_g , e_a -Bereiche bei konstanten Lecherdrahtlängen hatten die gleiche Gestalt wie der in Fig. 3 dargestellte Bereich. Auffallend war, daß die Röhre bei sehr kleiner Gitterspannung ($e_g = 100$) Schwingungen zeigte. Die Welle war nahezu konstant innerhalb dieses Bereiches. Als größte Differenz wurden 2 mm gemessen.

Die gleichen Versuche, die mit Röhren Nr. 240 und 241 angestellt wurden, wurden mit Röhre Nr. 249 wiederholt (Dimension der Röhre vgl. Tab. 1). Die Röhre Nr. 249 hat gegenüber den Röhren Nr. 240 und 241 den wesentlichen Unterschied, daß die Anode aus einer durch einen Metallbügel überbrückten Drahtspirale besteht. Auch sind die Elektrodenzylinder vertikal angeordnet. Die Röhre zeigte ein ähnliches Verhalten wie die bisher untersuchten; sie zeigte eine ausgesprochene Lecherdrahtschwingung mit einem Energiemaximum bei $\lambda = 45$ cm, außerdem zeigte sie eine kurze Welle von 22 cm, die wieder nur ganz wenig durch L zu ändern war.

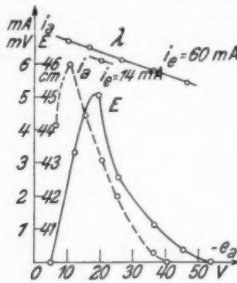
Die Röhre wurde in erster Linie wegen der durchbrochenen Anode untersucht. Unter der Annahme, daß die auftretenden Wellenlängenänderungen durch die Betriebsdaten, durch den Einfluß der in dem Raum Gitter–Anode laufenden Elektronen auf die Gitter–Anoden-Kapazität bedingt sind, mußte, falls Gitter und Anode aus Spiralen bestanden, der Einfluß geringer sein. Es mußte sich also bei spiraler Anode eine geringere Wellenlängenänderung durch die Betriebsdaten zeigen als bei voller Anode. Die Röhre Nr. 249 hatte zufällig den Vorteil, das Strahlungsmaximum ebenfalls bei $\lambda = 45$ cm wie die Röhre Nr. 241 mit voller Anode zu zeigen.

Fig. 10. Röhre Nr. 249.
Lecherdrahtschwingung;
lange Welle; $L_{\text{opt}} = 11$ cm
für $e_g = 220$ Volt; $\lambda = f_1(e_a)$;
 $E = f_2(e_a)$; $i_a = f_3(e_a)$

Die Kurven in Fig. 10 zeigen die Bestätigung obiger Vermutung. In einem Spannungsbereich von 50 Volt ändert sich λ nur um 1,5 cm gegenüber 4,5 cm bei Röhre Nr. 241. Außerdem zeigte diese Röhre ebenso wie Röhre Nr. 184 eine Zunahme der Wellenlänge mit wachsender Emission bei negativer Anodenspannung, was auf die Ausbildung stärkerer Raumladungen schließen läßt.

9. Messungen an Röhren mit Spiralschwingungen

Bei Röhren, die ein nicht überbrücktes Gitter hatten, konnte der aus Gitterspirale und Bügel gebildete geschlossene



Spiralenkreis nach K. Kohl zu Schwingungen angeregt werden. Die Schwingungen waren in der Ebene dieses Drahtkreises linear polarisiert und von den Zuleitungen unabhängig. Ein Spannungsknoten trat in der Mitte des die beiden Enden der Spirale verbindenden Bügels, der zweite Knoten in der Mitte der Spirale auf. Es war kein wesentlicher Unterschied festzustellen, ob die Gleichstromzuleitung zu dem einen oder anderen Knoten geführt war.

Die mit den Röhren Nr. 184 und 185 gemachten Versuche zeigten, daß auch bei den Spiralschwingungen noch eine Beeinflussung der Wellenlänge durch die Betriebsdaten auftritt, ähnlich wie bei den Röhren mit Lecherdrahtschwingungen.

Die drei Röhren Nr. 109, 185 und 199 (Tabelle I) wurden ausführlich vermessen. Sie sind gleichartig gebaut. Die Drahtspirale weist 14 Windungen auf. Das Verhältnis der Elektrodenradien r_2/r_1 ist für alle drei Röhren ungefähr gleich 2,5. Sie unterscheiden sich also nur durch die Länge des Drahtkreises und durch die Größe der Elektroden Durchmesser.

In Fig. 11 sind nur für die Röhre Nr. 199 in der gleichen Weise, wie dies bei Röhre Nr. 241 geschehen ist, die e_g , e_a -Bereiche bei konstanter Emission aufgenommen. Alle drei Röhren besitzen zwei derartige Bereiche. Es wurden außerdem die Wellenlängen an verschiedenen Stellen der e_g , e_a -Bereiche gemessen (vgl. Fig. 11). So zeigte sich, daß im zweiten Bereich bei kleinerer Anodenspannung die Wellenlänge im Mittel etwas kürzer ist als im ersten Bereich. Ferner ist die Anfangsemission für den zweiten Bereich kleiner.

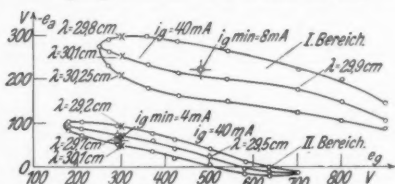


Fig. 11. Röhre Nr. 199. Spiralschwingung. e_g , e_a -Bereiche $i_s = \text{const}$

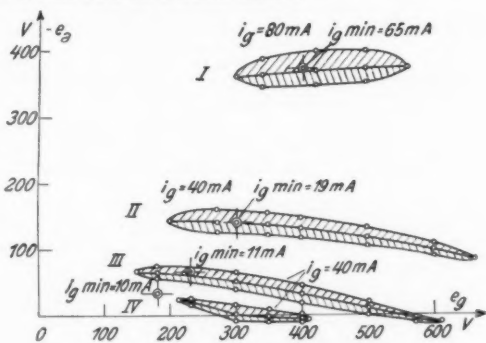


Fig. 12. Röhre Nr. 168. Spiralschwingung. e_g , e_a -Bereiche $i_s = \text{const}$; $\lambda = 12,6 \text{ cm}$

Mehr als zwei Bereiche konnten bei den Röhren gefunden werden, bei denen das Verhältnis der Elektrodenradien r_2/r_1 größer als 2,5 war. Die Messungen an einer solchen Röhre sind im folgenden wiedergegeben: Die verwendete Röhre Nr. 168 hatte genau denselben Drahtkreis wie die Röhre Nr. 109, nur war die Anode weiter gehalten. Es war $\frac{r_2}{r_1} = 4$.

In Fig. 12 sind die vier gefundenen Bereiche wiedergegeben. Die Anodenspannung für den ersten Bereich ist schon recht beträchtlich (-400 Volt). Die Anfangsemission muß auch sehr hoch gehalten sein (etwa 65 mA), um überhaupt noch Schwingungen zu bekommen. Mit zunehmender Ordnungszahl der Bereiche nimmt die Anfangsemission ab. Aus den Kurven in Fig. 12 ist eine Gesetzmäßigkeit für die Anodenspannung zu vermuten.

Trotz der hohen Anfangsemission ist die Energieausbeute im ersten Bereich am besten und nimmt mit steigender Ordnungszahl der Bereiche nahezu linear ab.

10. Weitere Messungen an Röhren mit Spiralschwingungen

Bei den Versuchen mit Lecherdrahtschwingungen bei Röhre Nr. 241 zeigte sich schon andeutungsweise bei positiver Anode ein zweites Energie-

maximum. Noch ausgeprägter zeigen dies die Röhren mit Spiralschwingungen bei nicht zu weiter Anode. In Fig. 13 sind die beiden Energie-maxima im zweiten Schwingungsbereich der Röhre Nr. 109 dargestellt. Es ist hier die Energie, die optimale Anodenspannung und der Anodenstrom für konstante Emission als Funktion der Gitterspannung aufgenommen. Wird die Anodenspannung positiv, so steigt der Anodenstrom auf ein Vielfaches. Die Energie, die bei der Anodenspannung Null ein Minimum aufweist, nimmt nun bei Positivwerden der Anodenspannung wieder zu. Es ist sogar möglich, falls die Emission nur groß genug gewählt wird, bei positiver Anodenspannung mehr Energie aus der Röhre herauszuholen als dies bei dem gleichen Bereich bei negativer Anodenspannung möglich ist. Bemerkenswert ist noch, daß der bei positiver Anodenspannung

auf tretende Anodenstrom im Schwingungsfall kleiner ist, als wenn keine Schwingungen vorhanden sind.

Faßt man die Ergebnisse über die Schwingungen bei positiver Anodenspannung zusammen, so ergibt sich:

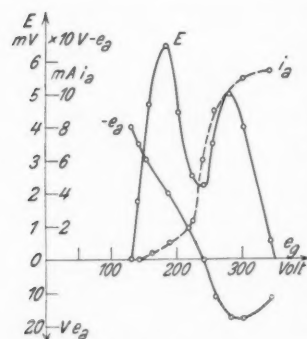


Fig. 13. Röhre Nr. 109. Spiralschwingung. $\lambda = 14,2$ cm. Bereich 2. $E = f_1(e_g)$; $e_a \text{ opt} = f_2(e_g)$; $i_a = f_3(e_g)$ bei $e_a \text{ opt}$; $i_e = 40$ mA

1. Schwingungen bei positiver Anodenspannung erscheinen immer zwangsläufig bei hoher Gitterspannung und Emission am Ende eines Schwingungsgebietes bei negativer Anodenspannung; sie scheinen demnach keinen selbständigen positiven Schwingungsbereich zu bilden.

2. Der Anodenstrom bei positiver Anodenspannung ist im Schwingenzustand kleiner als ohne Schwingungen.

3. Die Schwingleistung zeigt außer dem bei negativer Anodenspannung auftretenden Maximum sehr häufig ein zweites Maximum bei positiver Anodenspannung.

11. Weitere Messungen über den Einfluß der Glühkathodenemission

Um den Zusammenhang zwischen Gitterspannung und Emission oder, was das gleiche ist, zwischen Elektronengeschwindigkeit und Elektronen-

dichte zu ersehen, wurden die Kurven in Fig. 14 mit der Röhre Nr. 185 aufgenommen. Die Kurven $E = \text{konst.}$ stellen Höhenlinien in den Raum $e_g, i_a - E$ dar. Die Anodenspannung war zweckmäßig für das Maximum der Schwingungen eingestellt, um die Laufzeitbeziehung, die für den Anodenraum erforderlich ist, nach Möglichkeit zu erfüllen. Bei kleiner Gitterspannung sind für $e_g = \text{konst.}$ zwei Punkte $E = 0$ zu erhalten. Die Leistung geht also mit steigender Emission über ein Maximum, um wieder auf Null zurückzukehren. Bei hoher Gitterspannung muß die Emission hoch sein, um überhaupt Schwingungen zu erhalten.

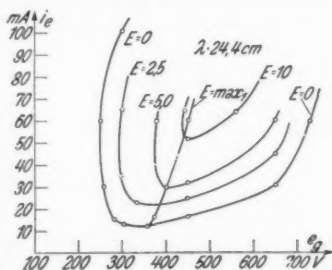


Fig. 14. Röhre Nr. 185. Spiralen-schwingung. $\lambda = 24,4$ cm; e_g, i_a -Schwinggebiet; Kurven $E = 0$ und $E = \text{konst.}$ bei $e_a \text{ opt}$

12. Versuche mit Glühkathoden im Gitteranodenraum

Eine wie Röhre Nr. 185 gebaute Röhre mit einer Spiralen-schwingung von 24,4 cm wurde mit einer, später mit zwei diametral gegenüberstehenden Glühkathoden in 1 mm Abstand von der Anode versehen (Röhre Nr. 242). Die wichtigsten Ergebnisse dieser Versuche seien hier aufgeführt:

Wurde die eine äußere Kathode allein geheizt, so konnte die Spirale nicht in Schwingungen versetzt werden. Es konnten jedoch bei gleichzeitiger Heizung der zentralen Kathode Schwingungen erhalten werden. Die Schwingungen waren bei einer viel kleineren Emission der zentralen Kathode noch stabil als ohne Emission der äußeren Kathode. So war für den ersten Bereich bei $e_g = 160$ Volt und $e_a = -115$ Volt die kleinste Emission 10 mA. Lieferte die äußere Kathode 10 mA, so konnte mit der Emission der zentralen Kathode bis auf 2 mA zurückgegangen werden, bis die Schwingungen erst aussetzten. Die beiden Kathoden wurden etwa auf gleichem Potential gehalten.

Mit zwei äußeren Kathoden konnten dann auch ohne Beteiligung der zentralen Kathode Schwingungen erregt werden. Die günstigste Gitterspannung betrug hier 220 Volt, die günstigste Anodenspannung — 28 Volt gegenüber den äußeren Kathoden. Die Schwingungen setzten schon bei 8 mA Emission ein. Die Energie war etwa $\frac{1}{25}$ von derjenigen, die bei Heizung der zentralen Kathode allein bei derselben Emission auftrat.

Rückte man die äußeren Kathoden von der Anode weg, so wurde die Leistung geringer. Waren die äußeren Kathoden in der Mitte zwischen Spannungselektrode und Anode angebracht, so konnte mit ihnen die Spirale nicht mehr zu Schwingungen erregt werden. Wurden diese äußeren Kathoden beim Vorhandensein von Schwingungen zusammen mit der zentralen Kathode geheizt, so setzte ihre Elektronenemission die Schwingleistung herab; war ihre Elektronenemission sehr hoch, so konnten die Schwingungen ausgelöscht werden.

13. Schwingungserzeugung mit Zweielektrodenröhren im homogenen Magnetfeld

Einleitung

Wie von Zacek (11) erstmalig gezeigt wurde, gelingt es bei Zweielektrodenröhren unter Zuhilfenahme eines homogenen Magnetfeldes ebenfalls, ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen hoher Frequenz zu erzeugen. Die so erzeugten Wellen zeigen ebenso wie die mit Dreielektrodenröhren erzeugten Schwingungen eine Abhängigkeit von den Betriebsdaten, nämlich von der an der Röhre angelegten Spannung, von der Größe der Emission und der Stärke des Magnetfeldes.

a) Senderanordnung

Der Sender, mit dem die Röhren im Magnetfeld untersucht wurden, bestand im wesentlichen aus einem System von drei Paralleldrähten für die Zuführung zu Kathode und Spannungselektrode, die mit einer gemeinsamen Abstimmungsplatte versehen waren. Da für das Zustandekommen der Schwingungen ganz bestimmte Winkel zwischen Röhrenachse und Magnetfeld notwendig waren, wurde der Ständer nach zwei Richtungen drehbar eingerichtet, um den Winkel, den die Röhrenachse mit den Feldlinien bildet, genau einstellen und messen zu können. Der verwendete Magnet gestattete es, Feldstärken bis zu 3000 Amp.-Wdg./cm zu erzeugen. Da die Schwingungen nur bei ganz bestimmten kritischen Feldstärken auftraten, wurde, um die Feldstärke des Magneten möglichst kontinuierlich zu verändern, ein großer Widerstandsatz verwendet, der eine stetige Stromstärkenänderung bis zu 20 Amp. gestattete.

b) Ergebnisse orientierender Messungen

Mit dieser Anordnung wurde versucht, einige der schon vermessenen Röhren mit Spiralschwingungen auch im Magnetfeld zum Schwingen zu bringen. Die Anode, die jetzt überflüssig war, wurde meist isoliert. Nahezu alle Röhren, deren Gitterspiralen mit Anodenspannung ohne Magnetfeld erregt werden konnten, zeigten diese Schwingungen auch im Magnet-

feld. Ja die Röhren, die mit Anodenspannung allein nicht zur Erregung gebracht werden konnten, lieferten im Magnetfeld noch Schwingungen. Sogar Röhren mit nichtzylindrischer Spannungselektrode konnten in einigen Fällen auf diese Weise erregt werden. Später wurden dann noch einige Röhren speziell für die Untersuchung im Magnetfeld mit nur zwei Elektroden gebaut (Röhre Nr. 56). Die mit diesen Röhren gemachten Erfahrungen decken sich in allen wesentlichen Punkten mit den bei Röhren mit Spiralschwingungen gemachten, so daß auf die Wiedergabe dieser Versuche verzichtet wurde.

Unter anderem wurden auch Versuche durchgeführt, die den Untersuchungen von Slutkin und Steinberg (9) entsprechen. Nach den gemachten Erfahrungen handelt es sich dabei um die Schwingungsanregung des von der Anoden- und Kathodenzuleitung gebildeten Lecherdrahtsystems. Gegenüber den Spiralkreissschwingungen konnten aber dabei keine neuen Ergebnisse erzielt werden.

c) Messungen an der Röhre Nr. 221

Die mit der Röhre Nr. 221 (Dimension, vgl. Tab. 1) gemachten orientierenden Messungen über die Veränderlichen: den Winkel, der Magnetfeldstärke, der Spannung und der Emission, ihre Abhängigkeit voneinander und ihren Einfluß auf Energie und Wellenlänge ergaben folgendes Resultat:

Der Schwingbereich der Magnetfeldstärke war trotz Nachstellen aller übrigen Größen klein. Die günstigste Magnetfeldstärke war nahezu konstant. Der Schwingbereich des Winkels war stark von der Emission und der Spannung abhängig und war bei kleiner Emission und Spannung klein, bei großer Emission und hoher Spannung groß, etwa 12° . Der günstigste Winkel jedoch nahezu konstant. Der Schwingbereich der Spannung war ebenfalls groß (500 Volt). Der Schwingbereich der Emission schließlich zeigte sich stark von der Spannung abhängig. Er war bei kleiner Spannung klein und stieg mit wachsender Spannung. Die erzeugte Wellenlänge war nur wenig von den Betriebsdaten abhängig. Eine Wellenlängenänderung durch verschiedene Winkeleinstellungen konnte nicht festgestellt werden.

Die Wellenlängenänderung durch die Magnetfeldstärke war gerade noch zu messen. Bei einer Spannung von 500 Volt und einer Emission von 14 mA konnte die Magnetfeldstärke von 900–950 Amp.-Wdg./cm variiert werden. Die Wellenlänge war bei 900 Amp.-Wdg./cm 30,1 cm, bei 950 Amp.-Wdg./cm 29,7 cm. Die Wellenlänge wurde also mit zunehmender Feldstärke etwas kürzer.

Der bei allen Röhren gefundene charakteristische Zusammenhang zwischen Spannung und Emission ist in Fig. 15 bei einer nahezu konstanten günstigsten Feldstärke von 950 Amp.-Wdg./cm und dem günstigsten Winkel von 6° dargestellt. Das schraffierte Gebiet bezeichnet die Betriebsdaten $e_g - i_g$, bei denen Schwingungen auftreten. Die nahezu in der Mitte des Gebietes verlaufende Kurve $i_{g, \text{opt}}$ bezeichnet die Betriebsdatenpaare, bei denen die im Kurvenblatt eingetragene Strahlleistung E maximal wird. Spannung und Emission nehmen gleich-

sinnig zu. Die kleinste Emission liegt unter 1 mA. Bei Anregung der gleichen Spirale mittels Anode war dagegen die Emission bei den günstigen Betriebsdaten im zweiten Bereich wenigstens 5 mA. Das Schwinggebiet hat einen ganz anderen Charakter als das bei Dreielektrodenröhren. Charakteristisch ist somit der mit steigender Spannung sich trichterförmig erweiternde Emissionsbereich. Eine Fortsetzung des Bereiches nach größerer Spannung und größerer Emission ist durch das Labilwerden der Emission nicht möglich. Von einer Gitterspannung von etwa 400 Volt ab nimmt die Energie für die günstigste Emission nahezu linear zu.

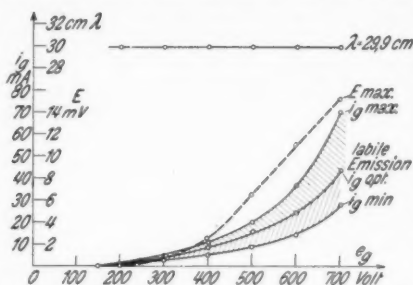


Fig. 15. Röhre Nr. 221. Spiralschwingung im Magnetfeld. Grundschiwingung.
 $\lambda = 29,9$ cm; e_g, i_g -Schwinggebiet $E = f_1(e_g)$;
 $\lambda = f_2(i_g)$; bei i_g opt; H opt = 950 Amp.-Wdg./cm; $\alpha = 6,0^\circ = \text{const}$

ist für i_g , opt die Wellenlänge konstant = 29,9 cm. Sie ist genau so groß wie bei der Erregung der Spirale mittels Anodenspannung. Die Änderungen durch die Betriebsspannung sind unterhalb der Meßgenauigkeit.

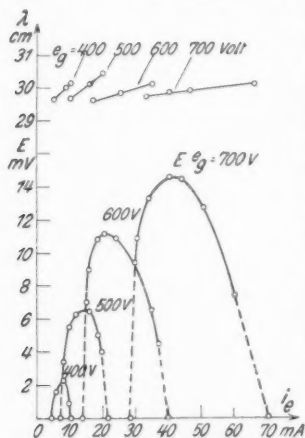


Fig. 16. Röhre Nr. 221. Spiralschwingung im Magnetfeld. Grundschiwingung.
 Schnitte $e_g = \text{const}$; $E = f_1(i_g)$;
 $\lambda = f_2(i_g)$; $H = 950$ Amp.-Wdg./cm;
 $\alpha = 6,0^\circ = \text{const}$

Bei etwas größerer Feldstärke (1050 Amp.-Wdg./cm) und einem etwas größeren Winkel von 10° konnte man eine zweite Welle von 18,6 cm erhalten, die man ohne Zweifel als Oberwelle des geschlossenen Drahtkreises ansprechen kann. Ohne Magnetfeld mit Anodenspannung gelingt die Erregung dieser Oberwelle nicht. Die Betriebsdaten für den Schwingungsbereich dieser Oberwelle liegen bei etwas höheren Werten als die entsprechenden für die Grundwelle. Die Anfangsemission liegt etwas höher, bei etwa 5 mA, der Emissionsbereich ist breiter. Die Wellenlänge ist ebenfalls im ganzen Spannungsbereich konstant.

In Fig. 16 sind Wellenlängen und Energien als Funktion der Emission bei verschiedenen Spannungen aufgetragen. Die Wellenlänge nimmt bei konstanter Spannung mit steigender Emission zu. Die maximale Änderung beträgt rund 3 Proz. Die Wellenlängenänderung durch die Emission nimmt

mit zunehmender Spannung ab. Bei dem gestrichelten Teil der Kurven sind die Schwingungen nicht stabil.

Vergleicht man die mit Zweielektrodenröhren im Magnetfeld gewonnenen Ergebnisse mit den bei Dreielektrodenröhren gewonnenen, so fällt als wesentlich auf, daß mit derselben Röhre in beiden Fällen etwa die gleiche Welle erzeugt werden kann. Die Betriebsdaten vermögen in beiden Fällen nur wenig die Wellenlänge des Schwingkreises zu verändern.

II. Zusammenfassende und theoretische Betrachtungen

1. Die zur Erregung kommenden Schwinggebilde

Wie aus den beschriebenen Messungen hervorgeht, wurden sowohl Schwinggebilde mit fester Eigenfrequenz, meist eine geschlossene Drahtspirale, als auch solche mit veränderlicher Eigenfrequenz (Lechersystem) zur Erregung gebracht.

Es wurde für alle Röhren mit geschlossenem Drahtkreis in erster Annäherung $\lambda \leq L$ entsprechend dem gleichen experimentellen Befund von Grechowa (4) und den klassischen Berechnungen von Drude der Eigenfrequenzen von Drahtspiralen gefunden. Eine eingehende Nachprüfung der Eigenfrequenz des Lechersystems mit Endkapazität konnte zunächst nicht erfolgen, da hierzu noch spezielle Messungen bezüglich der Größe der vorhandenen Endkapazität notwendig gewesen wären.

2. Die für die Schwingungserzeugung charakteristischen Befunde

a) Der auftretende Anodenstrom

Sowohl die Röhren mit Lecherdraht- als auch die mit Spiralenkreisschwingungen zeigen bei stark negativer Anodenspannung (Röhre Nr. 185 noch bei $e_a = -100$ Volt) Anodenstrom. Bei den Röhren mit Spiralschwingungen führt die Anode nahezu keine Wechselspannungen, so daß durch ein Positivwerden derselben der auftretende Anodenstrom nicht erklärt werden kann. Auf Grund der gemessenen Strahlleistung errechnet sich jedoch eine Wechselspannung auf der Gitterspirale von gleicher Größe. Man wird demnach annehmen können, daß ein Teil der das Gitter passierenden Elektronen durch diese die Energie bis zu 100 Volt aufnimmt um zur Anode zu gelangen.

b) Errechnete Laufzeiten und Schwingungsdauern

Errechnet man auf Grund des Potentialverlaufes zwischen den Zylinderelektroden der Röhren ohne Berücksichtigung der Wechselspannungen die Elektronenlaufzeiten und bezeichnet man mit T_1 die einfache Kathoden-Gitterlaufzeit, mit T_2 die einfache Laufzeit Gitter-

Umkehrfläche und mit T die Schwingungsdauer, so ergibt sich im wesentlichen für die untersuchten Röhren folgendes Resultat:

Die kürzeste Kathoden-Gitterlaufzeit T_1 weist die Röhre Nr. 241 mit Lecherdrahtschwingungen auf. T_1 variiert von 1–17 Proz. der Schwingungsdauer.

Bei Röhre Nr. 199, die ebenfalls zu Lecherdrahtschwingungen angeregt wurde, ergibt sich T_1 zu 41,5 Proz. Während also die Laufzeit bei Röhre Nr. 241 noch nicht vergleichbar mit der Schwingungsdauer ist, kommt bei den anderen Röhren die Laufzeit schon nahe an $T/2$ heran.

Bei den Röhren mit Spiralschwingungen ist T_1 im Mittel ebenfalls 40 Proz. der Schwingungsdauer. Bei den größeren Typen ist außerdem T_1 in ziemlich weiten Grenzen bei Röhre Nr. 199 von 30 bis 71 Proz. der Schwingungsdauer zu variieren.

Der Zusammenhang zwischen T_2 und T bei der Röhre Nr. 241 geht aus den Tabellen 2 und 3 hervor. In Tab. 2 sind für die beiden Wellenlängen mit optimaler Energie $\lambda = 45$ cm und $\lambda = 19$ cm für extreme bzw. optimale Spannungspaare e_g und e_a , T_1 , T_2 und T angegeben. Legt man für $\lambda = 45$ cm die Beziehung $2T_2 = T$ und für $\lambda = 19$ cm die Beziehung $T_2 = T$ zugrunde, so ist unter ΔT Proz. die prozentuale Abweichung der auf Grund der Formeln gewonnenen Werte von den in der Tabelle angegebenen zu verstehen. Man sieht, für das optimale Spannungspaar $e_g = 320$ Volt und $e_a = -32$ Volt ist der Fehler bei $\lambda = 45$ cm unter 1 Proz. Bei $\lambda = 19$ cm und e_g optimum etwa 400 Volt und $e_a = -75$ Volt 5 Proz. Die größten Abweichungen betragen im ersten Falle 20 Proz., im zweiten 9 Proz.

Tabelle 2
Röhre Nr. 241

λ cm	e_g Volt	e_a Volt	10^{-10} sec			ΔT %	Bildungsges.
			T_1	T_2	T		
45,0	320	-32	1,23	7,55	15,0	< 1	} $2T_2 = T$
45,0	100	-50	2,53	7,75	15,0	+ 4	
45,0	850	+13	0,75	6,12	15,0	-18	
45,2	320	-10	1,23	9,1	15,07	+20	
41,5	320	-60	1,23	6,73	13,8	- 2,5	
19,0	180	-85	1,64	5,94	6,32	- 6	} $T_2 = T$
19,0	400	-75	1,1	6,0	6,32	- 5	
19,0	600	-45	0,9	6,05	6,32	- 4	
19,0	800	-25	0,78	5,73	6,32	- 9	

Tabelle 3
Röhre Nr. 241

λ cm	e_g opt. Volt	$-e_a$ opt. Volt	10^{-10} sec			ΔT %	Bildungsges.
			T_1	T_2	T		
28,8	700	100	0,83	4,85	9,6	+1	} $2T_2 = T$
33,7	640	60	0,87	5,6	11,2	0	
40,1	490	38	0,99	6,55	13,4	-2	
46,0	330	27	1,2	7,95	15,3	+4	
54,0	240	24	1,42	9,4	18,0	+4,5	
60,0	140	17	1,85	10,5	20,0	+5	

In Tab. 3 sind für verschiedene Wellenlängen der Röhre Nr. 241 bei den günstigsten Betriebsspannungen T_1 , T_2 und ΔT aufgetragen. ΔT bleibt von $\lambda = 28,8$ cm bis $\lambda = 60$ cm unter 5 Proz. Bei der nur ungenau vorzunehmenden Bestimmung der Röhrenabmessungen bedeutet dies eine sehr gute Übereinstimmung mit den aufgestellten Beziehungen.

Rechnet man auf Grund der e_g , e_a -Bereiche für die Röhre Nr. 199, die Spiralenschwingungen mit zwei Bereichen aufweist, die Laufzeiten T_1 und T_2 aus, so zeigen sich andere Gesetzmäßigkeiten. In Tab. 4 sind für extreme bzw. optimale Betriebsdaten die errechneten Werte zusammengestellt. Legt man für den ersten Bereich die Beziehung $T_1 + T_2 = T$ zugrunde, so ergibt sich ein ΔT im ungünstigsten Falle von 13–19 Proz.; bei optimalen Betriebsdaten beträgt der Fehler etwa 3 Proz. Für den zweiten Bereich scheint T_2 mit der Schwingungsdauer übereinzustimmen. Der Fehler ΔT ist wenigstens nur bei dieser Annahme klein.

Tabelle 4

Röhre Nr.	e_g Volt		$-e_a$ Volt		10^{-10} sec			ΔT %	Bildungsges.
					T_1	T_2	T		
I. Ber.	250	min.	275	opt.	5,82	5,5	10	+ 13	$T_1 + T_2 = T$
	600	opt.	199	"	3,75	6,65	10	+ 4	
	900	< max.	105	"	3,07	6,6	10	- 3	
	600	opt.	250	max.	3,75	6,04	10	- 2	
	600	"	140	min.	3,75	7,43	10	+ 12	
II. Ber.	175	min.	90	opt.	6,97	8,3	9,87	- 12	$T_2 = T$
	400	opt.	50	"	4,6	10,65	9,87	+ 8	
	565	< max.	0	"	3,86	10,7	9,87	+ 8,5	

Tabelle 5

Röhre Nr.	λ cm	e_g Volt	$-e_a$ Volt	10^{-10} sec			$l \frac{T_1}{m T_2}$	$n T$	Bildungsges.
				T_1	T_2	T			
199	130	180	0	6,86	18,9	43,3	51,5	43,3	$2 T_1 + 2 T_2 = T$
	120	400	0	4,6	12,7	40,0	34,6	40,0	
	70	400	136	4,6	8,0	23,3	25,2	23,3	
	52,5	160	58	7,3	12,3	17,5	19,6	17,5	
	40,0	240	130	5,95	8,32	13,3	14,3	13,3	
	30,0	600	200	3,75	6,65	10,0	10,4	10,0	
	29,7	400	50	4,6	10,65	9,87	10,65	9,87	
184	43	195	25	4,48	10,4	14,3	14,88	14,3	$T_1 + T_2 = T$
	32	280	80	3,75	7,0	10,7	10,75	10,7	
	24,4	450	143	3,0	5,34	8,15	8,34	8,15	
	24,3	320	4	3,53	9,67	8,12	26,4	24,24	
240	45,0	320	32	1,23	7,55	15,0	15,1	15,0	$2 T_2 = T$
	19,0	600	45	0,9	6,05	6,32	6,05	6,32	
168	12,6	400	375	1,6	2,9	4,2	4,5	4,2	$T_1 + T_2 = T$
	12,6	350	150	1,7	4,8	4,2	13	12,6	
	12,6	325	50	1,77	8,12	4,2	19,8	21,0	
	12,6	300	0	1,85	10,3	4,2			

Die Tab. 5 enthält schließlich eine Zusammenstellung von gemessenen Wellenlängen, Spannungen und berechneten Laufzeiten; dabei sind nur die energiestärksten Schwingungen aufgeführt. Die dazu angegebenen Gitter- und Anodenspannungen sind die für die Wellenlänge günstigsten. Ferner ist jeweils versucht worden, eine Beziehung zwischen den Laufzeiten und der Schwingungsdauer herauszufinden. Bei der Röhre Nr. 199 zeigte sich für die Wellen von $\lambda = 130, 120$ und 70 cm die sogenannte Barkhausenbeziehung erfüllt, d. h. die Gesamtlaufzeit für Hin- und Hergang stimmt annähernd mit der Schwingungsdauer überein. Bei den übrigen Röhren konnte diese Beziehung nicht gefunden werden. Die Röhrenabmessungen waren hier kleiner, das Gitter grobdrähtiger. Für die kürzeren Wellen der Röhre Nr. 199 sowie für die der Röhre Nr. 184 wurde fast durchweg die Beziehung $T_1 + T_2 = T$ gefunden. Den Spiralschwingungen der Röhre Nr. 168 mit konstanter Wellenlänge $\lambda = 12,6$ cm läßt sich eine Beziehung von der Art

$$2T_1 + 2T_2 = nT$$

zuordnen. Für n wurden dabei die Werte 2, 3 und 5 gefunden.

3. Die auftretenden Wellenlängenänderungen durch die Betriebsdaten

a) Die Abhängigkeit von der Emission

Die von Hornung (7) gemessene Abhängigkeit der Wellenlängen von der Emission, die von K. Kohl erklärt wurde als der Einfluß der Raumladungen auf die Betriebskapazität im Sinne eines Elektronengas-dielektrikums mit einer Dielektrizitätskonstanten $\epsilon < 1$, konnte bei den vorliegenden Untersuchungen nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Die hier gemessene Abhängigkeit der Wellenlänge von den Betriebsspannungen war jedenfalls bedeutend größer, so daß die gemessene Emissionsabhängigkeit wahrscheinlich anders zu erklären ist, insbesondere deshalb, da in einigen Fällen (Fig. 10) sogar eine Zunahme der Wellenlänge mit der Emission festgestellt wurde. Möglicherweise lassen sich diese Beobachtungen durch eine Kopplung der schwingenden Raumladung mit dem Schwingungssystem erklären. Der Umstand, daß bei positiver Anode nahezu keine Wellenlängenänderung durch die Emission eintritt, spricht ebenfalls dafür, daß die bloße Anwesenheit von Elektronen nicht genügt, um die Welle zu ändern.

b) Die Abhängigkeit von den Spannungen

Wie aus den Messungen in Fig. 4 hervorgeht, tritt bei Röhren, bei denen die Laufzeit T_1 keine Beziehung zur Schwingungsdauer aufweist, auch keine Wellenlängenänderung durch e_a ein, wenn man nur dafür sorgt, daß e_a für das Energieoptimum eingestellt ist.

Am größten ist im allgemeinen die Wellenlängenänderung durch die Anodenspannung. Mit wachsender negativer Anodenspannung verkürzt sich die Wellenlänge, was durch die damit verbundene Laufzeitverkürzung der Elektronen verständlich wird. Wie aus den Kurven in Fig. 6 hervorgeht, ist die Wellenlängenänderung durch die Emission bei der Röhre Nr. 241 dann nahezu gleich Null, wenn die Anodenspannung auf das Energieoptimum eingestellt ist. Die Wellenlängenänderung wird groß bei geänderten Betriebsdaten, besonders bei stark negativer Anodenspannung. Es scheint dies ein Beweis dafür zu sein, daß die Schwingung durch ein aus Raumladung und Schwinggebilde gekoppeltes System bedingt ist, da bei hoher Emission die Frequenzänderung viel stärker ist, als es durch eine bloße Kapazitätsänderung der Fall sein dürfte.

Kohl (11) gibt für die Wellenlängenänderung noch eine zweite Ursache als Erklärung an, nämlich die phasenunrichtige Erregung des Schwingungsgebildes durch die Elektronenbewegung bei nicht optimal gewählten Betriebsdaten.

4. Die Schwingungen im Magnetfeld

Experimentell zeigen die Schwingungen mit zusätzlichem Magnetfeld ein ganz ähnliches Verhalten wie die Schwingungen im Drei-Elektrodenrohr. Man wird auch in theoretischer Hinsicht sie unter den gleichen Gesichtspunkten einordnen. Auch hier hat man es wie im vorliegenden Fall mit mehr oder weniger gut definierten Schwinggebilden zu tun, bei denen die erregte Frequenz durch die auftretenden Raumladungen mitbeeinflusst ist.

Zusammenfassung und Schluß

In dieser Arbeit ist an Hand eines umfangreichen Röhrenmaterials versucht worden, die Ergebnisse von Barkhausen und Kurz (1), Gill und Morrel (2), Scheibe (3), Potapenko (8), K. Kohl (5) und Hollmann (6) zu bestätigen und zu erklären.

Auf der theoretischen Grundlage raumladungs-beeinflußter Schwingungssysteme können die gefundenen Erscheinungen erklärt werden.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Prof. Gudden für Überlassung von Hilfsmitteln und manch wertvollen Rat danken. Dank gebührt vor allem der Helmholtzgesellschaft und der Firma Süddeutsche Telefon-Apparate-Kabel und Drahtwerke, für zur Verfügung gestellte Hilfsmittel. Besonderen Dank schulde ich sodann Hrn. Privatdoz. Dr. Karl Kohl, unter dessen Leitung und Beratung die Arbeit durchgeführt wurde.

Literaturverzeichnis

- 1) H. Barkhausen u. K. Kurz, Phys. Ztschr. 21. S. 1. 1920.
- 2) E. W. B. Gill u. J. H. Morrel, Phil. Mag. 42. S. 265. 1921.
- 3) A. Scheibe, Ann. d. Phys. 73. S. 54. 1924.
- 4) M. T. Grechowa, Ztschr. f. Phys. 35. S. 50. 1926.
- 5) K. Kohl, Ann. d. Phys. 85. S. 1. 1928.
- 6) H. E. Hollmann, Jb. d. drahtl. Telegr. 33. S. 128. 1929.
- 7) H. Hornung, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 417. 1929.
- 8) G. Potapenko, Ztschr. f. techn. Phys. 10. S. 548. 1929.
- 9) A. Slutkin u. D. Steinberg, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 658. 1929.
- 10) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 17. 1930.
- 11) K. Kohl, Ergebnisse der exakten Naturw. 9. S. 275. 1930.

Ausführliche Literaturangaben befinden sich in der zuletzt angeführten Arbeit von K. Kohl.

Erlangen, Physikalisches Institut, Februar 1932.

(Eingegangen 16. Dezember 1931)

Über akustische Filter
Von E. Waetzmann und F. Noether

(Nach nicht veröffentlichten Arbeiten aus dem Physikalischen Institut
 der Technischen Hochschule zu Breslau)

(Mit 10 Figuren)

§ 1. Fragestellung

Der Gedanke, die Wellenfortpflanzung auf elektrischen Leitungen durch Einschaltung von einzelnen Widerständen, speziell Spulen, zu beeinflussen, ist nach einigen älteren Anregungen¹⁾ zuerst von Pupin und Campbell²⁾ durchgeführt worden. Sie fanden, daß bei genügender Kleinheit der Frequenz oder anderer für die Fortpflanzung maßgebender Konstanten eine solche „belastete“ Leitung mit einer bestimmten homogenen Leitung äquivalent ist; über diese Grenze hinaus aber treten andere Wirkungen ein, die, wie erst später erkannt wurde, zu einer Sperrung für die hohen Frequenzen führen. Dann hat K. W. Wagner³⁾ und etwas später Campbell⁴⁾ Modelle für homogene und für belastete Leitungen untersucht und als „Kettenleiter“ bezeichnet. Bei ihnen sind die Widerstände und die Querkapazitäten durch konzentrierte Schaltungen, aber auch durch Schaltungen von allgemeinerem Typus ersetzt. Durch geeignete Wahl können diese so eingerichtet werden, daß sie hohe, niedere oder Zwischenfrequenzen absperren oder durchlassen. Dadurch haben die Kettenleiter als „Siebketten“ oder „Filter“ große Bedeutung für die moderne Übertragungstechnik gewonnen. Die Theorie solcher Siebketten ist in den genannten und anschließenden Untersuchungen schon mit erhalten, und ihre spezielle Darstellung in diesem Aufsatz erfordert nur eine dem vorliegenden Zweck angepaßte kurze Formulierung.

Entsprechende Schaltungen sind auch auf rein akustischem Gebiet untersucht worden⁴⁾, wobei die homogene Leitung durch

1) O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, I, S. 445, London 1893.

2) Literatur vgl. bei S. Breisig, *Theoretische Telegraphie*, 2. Aufl. 1924; zu S. 418 ff.

3) S. Breisig, *Literatur zu S. 376 ff.*, insbesondere K. W. Wagner, *Arch. f. Elektrotechn.* 18. S. 78. 1927.

4) G. W. Stewart, *Phys. Rev.* 20. S. 528. 1922; 28. S. 1038. 1926.

ein Rohr, einzelne Längswiderstände durch Verengungen bzw. Erweiterungen des Querschnittes dargestellt werden. Den elektrischen Querverbindungen entsprechend werden an dem Rohr seitliche Abzweigungen in Form von Löchern, offenen oder geschlossenen Rohrstutzen, Resonatoren usw. angesetzt. Derartige Leitungen hat Stewart nach dem Wagnerschen Kettenleiterschema behandelt; ein Ansatz, der sich aber ohne starke Willkürlichkeiten nicht durchführen läßt. W. P. Mason¹⁾ hat daher auch hier das mehr der Pupinleitung analoge Schema angewandt, das der Einschaltung von einzelnen Widerstandsgliedern in eine homogene Leitung entspricht.

Unabhängig von Mason hat vor allem Eva Lewy²⁾ unter Leitung von E. Waetzmann die Untersuchung akustischer Siebketten theoretisch und experimentell in Angriff genommen, wobei der theoretische Ansatz nicht nur die bei Stewart vorhandenen Willkürlichkeiten vermeidet, sondern auch sehr einfach und zweckentsprechend ist. Ferner hat G. Göbel ebenfalls im Physikalischen Institut der hiesigen T. H. einige weitere Untersuchungen ausgeführt. Da bisher verhältnismäßig wenig experimentelles Material über die akustischen Filter publiziert worden ist, glauben wir, daß es von Interesse sein wird, wenn wir über einen Teil der Meßresultate im Zusammenhang mit der Theorie berichten. Es soll sich dabei nicht um eine systematische oder gar erschöpfende Mitteilung handeln, sondern nur um einen kleinen Beitrag zur weiteren Klärung der in Frage stehenden Probleme.³⁾

§ 2. Theoretisches

Stewart setzt die Abmessungen der einzelnen akustischen Schaltelemente, aus denen er seine Filter herstellt, als klein gegen die in Frage kommenden Wellenlängen voraus; er geht also von dem Schema des „konzentrierten“ Kettenleiters aus. Die die Hauptleitung bildenden Widerstände bezeichnen wir mit Z_1 , die Querverstände mit Z_2 . Für die Querverstände kann die aus den elektrischen Analogien übernommene quasi-stationäre Betrachtungsweise weitgehend beibehalten werden,

1) W. P. Mason, Bell. Syst. Techn. Journ. VI. S. 258. 1927.

2) Eine kurze Notiz über die Lewyschen Rechnungen findet sich in der Phys. Ztschr. 31. S. 358. 1930.

3) Eine elementar gehaltene Darstellung der Wirkungsweise akustischer Filter ist von E. Waetzmann und K. Schuster (Müller-Pouillet I, 3) gegeben worden.

indem die Abmessungen entsprechend gewählt werden.¹⁾ Für die Längswiderstände ist aber die Stewartsche Darstellung in keinem Falle befriedigend, weil es nicht möglich ist, ein Stück Leitungsrohr in eindeutiger Weise etwa als eine Hintereinander- oder Parallelschaltung von Kapazität und Selbstinduktion zu definieren. Wenn Stewart trotzdem zu vielfach befriedigender Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie gelangt, so liegt das daran, daß er für die Z_1 probe-weise verschiedene Kombinationen von Induktivitäten und Kapazitäten, die für den vorliegenden Filtertyp möglich sind, ansetzt und dann an Hand des Experimentes diejenige Kombination als die richtige annimmt, aus der sich die beste Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ergibt.

Wird die Länge der Rohrabchnitte zwischen je zwei Querschnitten größer als eine Viertelwellenlänge, so ist bei Stewart zwischen der für längere Wellen gefundenen Formel und dem Experiment gar keine Übereinstimmung vorhanden. Deshalb führt Stewart hier eine andere Betrachtungsweise ein, muß aber für den endgültigen Vergleich zwischen Experiment und Theorie wieder empirische Daten einführen. Wenn man die Schwierigkeit, daß sich die Längsstücke der Rohrleitung in eindeutiger Weise nicht definieren lassen, umgehen will und eine einheitliche Darstellung der akustischen Filter erhalten will, so muß man in der Hauptleitung von der quasistationären Betrachtungsweise abgehen und den Wellenvorgang betrachten.

Wir gehen von einer akustischen Leitung von konstantem Querschnitt S_1 aus, an die seitlich in gleichmäßigen Abständen l_1 gleiche akustische Widerstände Z_2 angebracht sind.

Den Begriff des akustischen Widerstandes Z_2 der konzentriert gedachten Abzweigungen wollen wir uns etwa auf folgende Weise klar machen: Die seitlichen Ansatzstutzen vom Querschnitt S_2 und der Länge l_2 sollen nach außen in Kammern von bestimmtem Volumen \bar{V}_2 münden.²⁾ Der in einer bestimmten Kammer herrschende Überdruck über den normalen Luftdruck P_0 sei P_e , der Überdruck über den normalen Luft-

1) Man beschränkt sich dann auf Löcher, kurze Stutzen und Helmholtzsche Resonatoren als Abzweigungen. Interferenzrohre, die aus einem Hauptrohr mit langen Seitenrohren bestehen, fallen also nicht unter diese einfache Betrachtungsweise.

2) Falls keine abgeschlossenen Kammern vorhanden sind, muß man sich einen bestimmten Wirkungsbereich im äußeren Raum abgrenzen, dessen Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind. Für größere Dimensionen wäre die quasistationäre Behandlung wieder nicht mehr zulässig.

druck im Innern der Hauptleitung sei P . Unter dem Einfluß der Druckdifferenz, die zwischen der Hauptleitung und der Kammer besteht, wird die Luft in dem Stutzen beschleunigt. Ist die Länge l_2 des Stutzens speziell groß gegenüber seinem Durchmesser, so ergibt sich für die Ausströmungsgeschwindigkeit u_2 die Gleichung:

$$\varrho l_2 \cdot \frac{du_2}{dt} = P - P_c,$$

wo ϱ die Luftdichte bezeichnet. Der Überdruck P_c in der Kammer bestimmt sich aus dem normalen Luftdruck P_0 mit Hilfe der adiabatischen Zustandsgleichung zu:

$$P_c = \kappa P_0 \cdot \frac{m - m_0}{m_0}.$$

Dabei ist $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen, $m_0 = \varrho V_2$ die im Ruhezustande in der Kammer vorhandene Luftmasse, m die im Schwingungszustande in der Kammer vorhandene Luftmasse. Da $m - m_0 = \varrho S_2 \cdot \int u_2 dt$ ist, so wird:

$$P = \varrho l_2 \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{\kappa P_0 S_2}{V_2} \cdot \int u_2 dt.$$

Handelt es sich um zeitlich harmonische Vorgänge von der Kreisfrequenz ω , so enthalten P und u_2 den Faktor $e^{i\omega t}$. Daher wird:

$$P = \left(i\omega \frac{\varrho l_2}{S_2} + \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{\kappa P_0}{V_2} \right) \cdot S_2 u_2.$$

Das Produkt $S_2 \cdot u_2$ stellt den in dem Stutzen fließenden „Mediumstrom“ dar. Definieren wir den akustischen Widerstand Z_2 der Abzweigung als das Verhältnis des Überdruckes P zum Mediumstrom $S_2 \cdot u_2$, so wird:

$$(1) \quad Z_2 = i\omega \frac{\varrho l_2}{S_2} + \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{\kappa P_0}{V_2}.$$

Z_2 entspricht in seiner Zusammensetzung einer Reihenschaltung einer Induktivität und einer Kapazität. Die in dem Ansatzstutzen vorhandene Reibung haben wir vernachlässigt; sonst würde in Z_2 noch ein reeller Bestandteil auftreten, der einem Ohmschen Widerstande entspräche.

Der Schallvorgang in den Abschnitten Z_1 der Hauptleitung wird durch die Wellengleichung bestimmt. Den Anschluß zwischen den Wellen in den einzelnen Abschnitten erhält man durch Festlegung der Übergangsbedingungen an den Abzweigestellen der Z_2 . Die Übergangsbedingungen sind den Kirchhoffschen Gesetzen über Stromverzweigungen vollkommen analog. Erstens muß der Druck an den Abzweigestellen stetig

sein, d. h. man muß denselben Wert P_n des Druckes erhalten, gleichgültig, ob man sich der Abzweigstelle n von links oder von rechts nähert. Zweitens muß von der Abzweigstelle ebenso viel Medium abfließen wie zu ihr hinfließt. Bezeichnen wir den von links her zur Abzweigstelle n hinfließenden Mediumstrom mit \overline{U}_n , den nach rechts von ihr wegfließenden Mediumstrom mit U_n , so muß sein:

$$(2) \quad \overline{U}_n = U_n + \frac{P_n}{Z_2},$$

da der in der Abzweigung fließende Mediumstrom gleich P_n/Z_2 ist.

Für die Zustandsgrößen P und U der Wellen in der Hauptleitung gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = -S_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{S_1}{a^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}, \end{cases}$$

wobei $a = \sqrt{\frac{\pi P_0}{\varrho}}$ die Schallgeschwindigkeit bedeutet. Von Reibungswiderständen ist abgesehen. Vergleicht man diese Gleichungen mit den Heavisideschen Wellengleichungen für eine verlustlose elektrische Doppelleitung¹⁾:

$$\begin{aligned} L \cdot \frac{\partial J}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ C \cdot \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial J}{\partial x}, \end{aligned}$$

so sieht man, daß der auf die Längeneinheit bezogenen Induktivität L die Größe ϱ/S_1 und der Kapazität pro Längeneinheit C die Größe $\frac{S_1}{\varrho a^2} = \frac{S_1}{\pi P_0}$ analog ist. Dem Wellenwiderstand $Z = \frac{P}{J} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ entspricht also hier

$$Z = \frac{P}{U} = \frac{\sqrt{\pi P_0 \varrho}}{S_1} = \frac{a \varrho}{S_1}$$

für eine einfache fortschreitende Welle. Eine Verengung des Rohres steht hiernach in Analogie zu einer Vergrößerung der Induktivität und des Wellenwiderstandes; andererseits kann man die Kapazität anschaulich so deuten, daß ein Teil des vorhandenen Mediumstromes zur Erzeugung von Druck abgezweigt wird (wie der elektrische Ladungsstrom Spannung erzeugt).

¹⁾ Vgl. z. B. Frank-Mises, Differential- und Integralgleichungen Bd. 2, XI, § 1.

Die Gl. (3) lassen sich bekanntlich sowohl durch rechts- wie durch linksläufige fortschreitende Wellen lösen. Fällt eine einzelne Welle auf eine der Abzweigstellen n , so bewirkt der Stromaustritt eine teilweise Reflexion der Welle, ein Prozeß, der sich weiterhin wiederholt. Es bildet sich auf diese Weise ein stationärer Zustand aus, bei dem in jedem Abschnitt Z_1 eine rechts- und eine linksläufige Welle in bestimmtem Verhältnis vorhanden sind. An der Abzweigstelle n sei der Druck der rechtsläufigen Welle mit P_n^+ , der der linksläufigen Welle mit P_n^- bezeichnet. Dann ist also:

$$(4a) \quad P_n = P_n^+ + P_n^-.$$

Der Druckverlauf in dem Abschnitt zwischen den Abzweigstellen n und $n+1$ ist ferner durch den Ausdruck gegeben $(P_n^+ \cdot e^{-ikz} + P_n^- \cdot e^{+ikz})$, wobei die Stelle $z=0$ mit der Abzweigstelle n zusammenfällt. Dann wird also:

$$(4b) \quad P_{n+1} = P_n^+ \cdot e^{-ikk_1} + P_n^- \cdot e^{+ikk_1}.$$

Analog wird:

$$(4c) \quad U_n = U_n^+ + U_n^-,$$

$$(4d) \quad \bar{U}_{n+1} = U_n^+ \cdot e^{-ikk_1} + U_n^- \cdot e^{+ikk_1}.$$

In dieser Darstellung sind im allgemeinen Falle sowohl die durch Reflexion an den einzelnen Gliedern entstehenden, als auch die durch Reflexion am Ende der ganzen Leitung entstehenden Teile enthalten. Die ersten sind notwendig zur Erfüllung der Übergangsbedingungen; von den letzten dagegen kann unter bestimmten Voraussetzungen abgesehen werden, nämlich dann, wenn die Anzahl der Leitungsglieder als unendlich angenommen wird, oder wenn bestimmte berechenbare Verhältnisse für die Schlußschaltung vorausgesetzt werden. Jedenfalls ist es von Wichtigkeit, daß man trotz der notwendigen Zusammensetzung aus links- und rechtsläufigen Elementarwellen den Begriff einer einfachen fortschreitenden Welle auf der ganzen Leitung definieren kann. Darunter ist ein solcher Zustand verstanden, bei dem alle Zustandsgrößen sich von Glied zu Glied nur um einen konstanten Amplitudenfaktor und um eine konstante Phase unterscheiden. Im allgemeinen Falle würde eine solche Welle durch Reflexion am Ende der Leitung noch zu einer gleichartigen, aber rückläufigen Welle Anlaß geben.

Wenn man in bekannter Weise mit komplexen Exponentialfunktionen rechnet, so bedeutet die Forderung der fortschreiten-

den Welle, daß sich alle Zustandsgrößen von Glied zu Glied nur um einen konstanten Faktor, der mit $e^{i\gamma}$ bezeichnet sei, unterscheiden sollen. Es muß also sein:

$$(5) \quad \begin{cases} P_{n+1} = P_n \cdot e^{i\gamma}, \\ \bar{U}_{n+1} = \bar{U}_n \cdot e^{i\gamma}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Gl. (2) und (4a) bis (4d) ergibt sich daraus:

$$(6) \quad \begin{cases} P_n^+ \cdot e^{-ikl_1} + P_n^- \cdot e^{+ikl_1} = (P_n^+ + P_n^-) \cdot e^{i\gamma}, \\ U_n^+ \cdot e^{-ikl_1} + U_n^- \cdot e^{+ikl_1} = \left(U_n^+ + U_n^- + \frac{P_n^+ + P_n^-}{Z_2} \right) \cdot e^{i\gamma}. \end{cases}$$

Nun ist $U_n^+ = \frac{1}{Z} \cdot P_n^+$ und $U_n^- = -\frac{1}{Z} \cdot P_n^-$, wobei $Z = \frac{a\varrho}{S_1}$ den Wellenwiderstand einer einfachen fortschreitenden Welle bedeutet. Daher erhalten wir für die Größen P_n^+ und P_n^- das homogene Gleichungssystem:

$$(7) \quad \begin{cases} P_n^+ \cdot (e^{-ikl_1} - e^{i\gamma}) + P_n^- \cdot (e^{+ikl_1} - e^{i\gamma}) = 0, \\ P_n^+ \cdot \left(e^{-ikl_1} - e^{i\gamma} - \frac{Z}{Z_2} \cdot e^{i\gamma} \right) - P_n^- \cdot \left(e^{+ikl_1} - e^{i\gamma} + \frac{Z}{Z_2} \cdot e^{i\gamma} \right) = 0. \end{cases}$$

Die Determinantengleichung dieses Systems lautet:

$$(8) \quad \cos \gamma = \cos kl_1 + i \frac{Z}{2Z_2} \sin kl_1.$$

Da wir nur den verlustlosen Kettenleiter betrachten wollen, so ist hier Z_2 , wie auch in Gl. (1) angenommen war, ein rein imaginärer Widerstand. Wir setzen daher $Z_2 = iZ_2'$, wobei Z_2' rein reell ist, und erhalten:

$$(9) \quad \cos \gamma = \cos \frac{\omega l_1}{a} + \frac{Z}{2Z_2'} \cdot \sin \frac{\omega l_1}{a}.$$

Zufolge Gl. (9) ist $\cos \gamma$ immer rein reell. Setzen wir $\gamma = \alpha + i\delta$, wobei α das Winkelmaß, δ das Dämpfungsmaß der Wellenfortpflanzung genannt wird, so zeigt die Diskussion folgendes:

Wenn $|\cos \gamma| < 1$ ist, ist $\delta = 0$, also $\gamma = \alpha$ rein reell. Der Übergangsfaktor $e^{i\gamma} = e^{i\alpha}$ bedeutet dann nur eine bestimmte Phasenänderung von Glied zu Glied der Leitung. Die Wellen werden also ohne Energieverluste durchgelassen; die betreffenden Frequenzen gehören einem „Durchlässigkeitsgebiet“ an.

Wenn dagegen $|\cos \gamma| > 1$ ist, ist δ von Null verschieden und α ein ganzes Vielfaches von π , also γ von der Form

$$\gamma = \nu\pi + i\delta.$$

Der Übergangsfaktor $e^{ir} = \pm e^{-\delta}$ bedeutet jetzt eine reine Dämpfung in der Fortschreitungsrichtung der zusammengesetzten Welle. Wenn die Gliederzahl der Leitung hinreichend groß ist, werden die Wellen durch die Leitung nicht hindurchgelassen, sondern reflektiert; die betreffenden Frequenzen gehören einem „Sperrgebiet“ an. Je nachdem $\cos \gamma$ positiv oder negativ ist, erfolgen die Schwingungen in zwei aufeinanderfolgenden Gliedern in gleicher oder in entgegengesetzter Phase.

Die Abhängigkeit der Filterwirkung von der Frequenz wird weiter unten noch näher diskutiert und mit den Experimenten verglichen werden. Nur soviel sei schon hier erwähnt, daß sich wegen der transzendenten Abhängigkeit des $\cos \gamma$ von ω unendlich viele Sperr- und Durchlässigkeitsgebiete ergeben werden. Diese Tatsache hat für den elektrischen Fall bereits früher Ulfilas Meyer¹⁾ festgestellt, worauf uns Hr. K. W. Wagner freundlichst aufmerksam machte. Indes waren im elektrischen Falle die höheren Durchlässigkeits- bzw. Sperrgebiete nicht effektiv nachweisbar, sondern äußerten sich nur in geringen Schwankungen der dort immer ziemlich erheblichen Dämpfung. Bei den zu besprechenden akustischen Versuchen lagen die Verhältnisse in dieser Hinsicht günstiger.

Es sei hier noch eine andere Auffassung der allgemeinen Theorie erwähnt, die F. Noether mathematisch durchgeführt hat.²⁾ Die diskontinuierlich verteilten Abzweigungen an den Stellen n der Leitung kann man auch als Grenzfälle kontinuierlich verteilter Ableitungen auffassen, wodurch sie unmittelbar in Parallele zu den Kapazitätskoeffizienten C in den Grundgleichungen treten. An Stelle der Konstanten C hat man es dann nur mit einer kontinuierlich veränderlichen periodischen Funktion zu tun, während die Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Gliedern in Fortfall kommen. Die Einschaltung von Widerständen in die Längsrichtung würde sich analog in einer periodischen Veränderlichkeit des Koeffizienten L ausdrücken. Das so erhaltene System:

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dx} &= -is(x) \cdot P; & s(x + l_1) &= s(x); \\ \frac{dP}{dx} &= -ir(x) \cdot U, & r(x + l_1) &= r(x)\end{aligned}$$

1) U. Meyer, Ztschr. f. techn. Physik 2. S. 306. 1921.

2) F. Noether, Anwendung der Hillschen Differentialgleichung. Verhandl. d. III. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik, Stockholm 1930. Bd. 3. S. 143.

ist eine Verallgemeinerung der Hilla'schen Differentialgleichung.¹⁾ Der naturgemäße Lösungsansatz dieses Systems ist die Aufsuchung von partikulären Lösungen, die sich beim Übergang von einer Periode zur nächsten multiplikativ verhalten, was eben unserer obigen „fortschreitenden“ Welle entspricht. Die Unterscheidung zwischen rechts- und linksläufigen Elementarwellen kommt dabei nicht mehr vor, sondern es wird von vornherein nur der gesamte Strom- bzw. Spannungszustand betrachtet. In dem von F. Noether (a. a. O.) behandelten Fall, daß Längswiderstände und Querverbindungen in gleichen Abständen abwechseln, ergibt sich als Bedingungsgleichung eine geringe Verallgemeinerung von (9) in der Form:

$$\cos \gamma = (1 + p) \cos \frac{\omega l_1}{a} + p + q \sin \frac{\omega l_1}{a}.$$

Der noch allgemeinere Fall einer sogenannten 4-Pol-Kette (mit kontinuierlichen Zwischenstücken) würde sich durch ein allgemeines System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten ausdrücken.

§ 3. Diskussion der Theorie und experimentelle Prüfung

Die Gl. (9) zeigt, daß für ein vorgegebenes Filter $\cos \gamma$ eine ganz bestimmte Funktion der Frequenz ω ist. Stellt man für ein spezielles Filter die $\cos \gamma$ -Werte als Funktion von ω graphisch dar, so verläuft die erhaltene Kurve teils in dem Außengebiet, für das $\cos \gamma > +1$ oder $\cos \gamma < -1$ ist, teils in dem Innengebiet, für das $\cos \gamma$ zwischen $+1$ und -1 liegt. Die Frequenzbereiche, für die die Kurve im Außengebiet verläuft, bilden die Sperrgebiete; die Frequenzbereiche, für die die Kurve im Innengebiet verläuft, bilden die Durchlässigkeitsgebiete. Dort wo die Kurve vom Außengebiet ins Innengebiet oder umgekehrt übergeht, liegt eine Grenzfrequenz vor. Für diese ist notwendig $\cos \gamma = +1$ oder $\cos \gamma = -1$. Als Bedingung für die Grenzfrequenzen folgt hiernach, wenn wir zur Abkürzung noch $\frac{\omega l_1}{a} = 2y$ setzen, aus Gl. (9)

im Falle $\cos \gamma = +1$:

$$(10a) \quad \sin y = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} y = \frac{Z}{2Z_1},$$

im Falle $\cos \gamma = -1$:

$$(10b) \quad \cos y = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg} y = -\frac{Z}{2Z_2}.$$

¹⁾ Vgl. E. T. Whittaker und G. N. Watson, *Modern Analysis*, Cambridge 1920, Chap. 19.

Im folgenden werden die beiden wichtigsten Spezialfälle, der sogenannte Hochtondurchlasser und der sogenannte Tieftondurchlasser, behandelt. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Hochtondurchlasser. Er ist dadurch charakterisiert, daß die Querwiderstände aus einfachen Löchern oder aus beiderseits offenen Rohrstützen bestehen, was sich dadurch ausdrückt, daß der Widerstand

$$(11) \quad Z_2' = \frac{\omega c}{c}$$

wird, wo c die sogenannte Leitfähigkeit der Öffnung bedeutet. Im speziellen Fall der Formel (1), wo die Länge des Stützens groß gegen den Durchmesser ist, ist

$$c = \frac{S_2}{l_2} = \frac{\pi r_2^3}{l_2}.$$

Für ein einfaches Loch ohne Stützen ist c gleich dem Durchmesser des Loches. Im allgemeinen Fall gilt

$$c = \frac{\pi r_2^3}{l_2 + \frac{\pi}{2} \cdot r_2} \quad 1)$$

Die Grenzfrequenzen sind dann nach (10a) und (10b) bestimmt durch die Gleichungen

$$(12a) \quad \sin y = 0 \quad \cos y = 0,$$

$$(12b) \quad \cotg y = 4\beta y \quad - \tg y = 4\beta y,$$

wobei $\beta = \frac{S_1}{c l_1}$ die sogenannte Filterkonstante ist. Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich für jeden speziellen Hochtondurchlasser die Frequenzen leicht bestimmen.

Um die Lage der Grenzfrequenzen bei sämtlichen Hochtondurchlassern mit einem Schlage übersehen zu können, ist es zweckmäßig, die Beziehung zwischen der Filterkonstanten β und dem Frequenzverhältnis ω/ω_0 als Kurve darzustellen, wobei ω eine Grenzfrequenz und $\omega_0 = \frac{a\pi}{l_1}$ diejenige Frequenz ist, deren halbe Wellenlänge gleich der Länge l_1 eines Einzelgliedes ist, die also die Resonanzfrequenz eines Einzelgliedes bildet. Fig. 1 zeigt den mit Hilfe der Gl. (12a) und (12b) berechneten Verlauf von β als Funktion der Größe ω/ω_0 .

In den so dargestellten Kurven entspricht jeder Parallelen zur Abszissenachse ein bestimmtes Filter (mit dem betreffenden Wert von β), jeder ihrer Schnittpunkte mit der Kurvenschar ergibt eine Grenzfrequenz des Filters. Die in der Fig. 1 ge-

1) Vgl. Lord Rayleigh, Theory of Sound Bd. II, § 307.

gezeichneten Geraden $\beta = 0,92$ und $\beta = 0,25$ entsprechen den experimentell untersuchten Hochtondurchlassern H 1 und H 2 (vgl. unten). Die Sperrgebiete sind schraffiert gezeichnet. Die Kurven zeigen, daß die Breite der Sperrgebiete sowohl mit

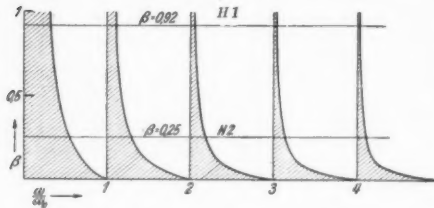


Fig. 1. Lage der Grenzfrequenzen der Hochtondurchlasser

so verbreitern sich alle Sperr- und Durchlaßgebiete in diesem Verhältnis, und im gleichen Verhältnis erhöhen sich alle Grenzfrequenzen.

Der erste wesentliche Unterschied zwischen den angegebenen Resultaten und dem Ergebnis des Stewartschen Ansatzes ist der, daß sich bei Stewart nur *eine* Grenzfrequenz, hier dagegen *unendlich viele* Grenzfrequenzen ergeben.

Geht man daran, die verschiedenen Sperrgebiete experimentell nachzuweisen, so ist noch folgendes zu bedenken: Da im Sperrgebiet der Schalldruck von Glied zu Glied um den Faktor $e^{-\delta}$ geschwächt wird, wird die Durchlässigkeit nur für den in der Theorie angenommenen Fall, daß die Anzahl der Glieder unendlich groß ist, gleich Null sein. Bei endlicher Gliederzahl dagegen wird die Sperrung je nach der Größe von δ mehr oder weniger vollkommen sein. Dazu kommt noch, daß die in der Rechnung vernachlässigte Verlustdämpfung eine gewisse Verwischung an der Grenze zwischen Sperr- und Durchlässigkeitsgebiet bewirkt. Will man gut ausgeprägte Sperrgebiete erhalten, so muß man daher dafür sorgen, daß das Dämpfungsmaß δ möglichst groß wird.

Berücksichtigt man, daß im Sperrgebiet $\cos \delta = \cos \gamma$ und daß nach den Gl. (9) und (11) für den Hochtondurchlasser

$$(13) \quad \cos \gamma = \cos \left(\frac{\omega l_1}{a} \right) + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\frac{\omega l_1}{a}} \cdot \sin \left(\frac{\omega l_1}{a} \right)$$

wird, so findet man, daß eine Vergrößerung von δ durch eine Verkleinerung von β bewirkt wird. Diese Überlegungen werden durch die Experimente vollkommen bestätigt.

Die Messungen wurden in der gleichen Weise wie bei Stewart ausgeführt: Der von einem Telefon T_1 kommende Schall wird einmal unter Zwischenschaltung eines glatten Rohres und dann unter Zwischenschaltung des Filters mit dem vom Vergleichstelefon T_2 kommenden Schall verglichen. Um störende Resonanzen in der akustischen Leitung zu vermeiden,

wurde in die Rohrleitung vor und hinter dem Filter lockerer Haarfilz eingebracht. Die Figg. 2 und 3 zeigen Meßergebnisse an zwei bestimmten Hochtondurchlassern $H 1$ und $H 2$. Als Abszissen sind die Frequenzen n in Hertz, als Ordinaten die Wurzeln der Durchlässigkeiten D aufgetragen. Für $H 1$ war der Radius der Hauptleitung $r_1 = 0,5$ cm, $l_1 = 10$ cm, der Radius des Ansatzstutzens $r_2 = 0,14$ cm, seine Länge $l_2 = 0,5$ cm, infolgedessen $\beta = 0,92$, die Anzahl der Glieder war 6. Die berechneten Grenzfrequenzen $n_1 = 510$, $n_2 = 1700$, $n_3 = 1870$ sind in der Figur markiert. Bei $H 2$ waren an jeder Verzweigungsstelle zwei Ansatzstutzen diametral gegenüber angebracht. Die

Maße waren: $r_1 = 0,725$ cm, $l_1 = 15$ cm, $r_2 = 0,25$ cm, $l_2 = 0,5$ cm, infolgedessen $\beta = 0,25$, die Zahl der Glieder betrug 6; die berechneten Grenzfrequenzen waren: $n_1 = 612$, $n_2 = 1130$, $n_3 = 1470$, $n_4 = 2260$, $n_5 = 2470$. Die Grenzfrequenzen der beiden Filter sind aus der Fig. 1 sofort zu entnehmen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\text{für } H 1 \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = 1700 \quad \text{und für } H 2 \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = 1130$$

ist. Beim Filter $H 1$ (Fig. 2) ist die Dämpfung im zweiten Sperrgebiet schon ziemlich gering. Bei $H 2$ (Fig. 3) dagegen

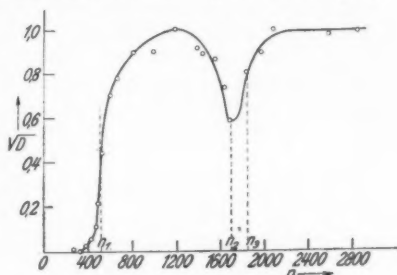


Fig. 2. Durchlässigkeit des Hochtondurchlassers $H 1$

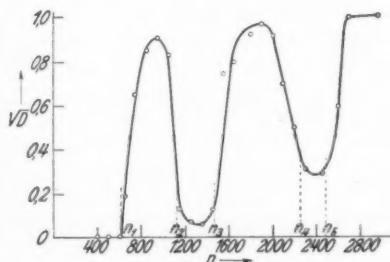


Fig. 3. Durchlässigkeit des Hochtondurchlassers $H 2$

weist infolge der Verkleinerung von β auch das dritte Sperrgebiet noch eine beträchtliche Dämpfung auf.

Eine weitere Bestätigung für die Brauchbarkeit der angegebenen Theorie liefert die Messung des Winkelmaßes α . Wie schon erwähnt, ist in den Durchlaßgebieten $\alpha = \gamma$; in den Sperrgebieten ist $\alpha = 0$ für $\cos \gamma > +1$ und $\alpha = \pi$ für $\cos \gamma < -1$. Zur Messung von α wurde eine Interferenzanordnung benutzt, wie sie Stewart¹⁾ zur Messung von akustischen Widerständen angegeben hat. Der vom Telefon T_1 kommende Schall geht durch das Filter und durch eine Rohrleitung L von variabler Länge und gelangt dann mit dem vom Vergleichstelefon T_2

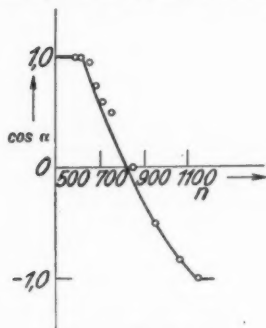


Fig. 4. Winkelmaß des Hochtondurchlassers H 2

kommenden Schall zur Interferenz. Als Filter wurde zunächst eine dreigliedrige Siebkette benutzt. Die Lautstärke von T_1 und die Länge der Rohrleitung L wurde dann solange variiert, bis sich die von T_1 und die vom Vergleichstelefon T_2 kommenden Schallwellen durch Interferenz auslöschten. Dann wurde zu dem Filter ein weiteres Glied hinzugefügt und durch Änderung von L wieder auf das Minimum der Schallstärke eingestellt. Aus der Differenz d der beiden Rohrlängen ergibt sich das Winkelmaß α nach der Beziehung $\alpha = \frac{2\pi d}{\lambda}$. Die Messung wurde an dem untersten Durchlässigkeitsbereich des Filters H 2 vorgenommen. Fig. 4 zeigt den Verlauf von $\cos \alpha$ als Funktion der Frequenz. Die Kreise geben die gemessenen Punkte an, die Kurve zeigt den von der Theorie geforderten Verlauf. Die Übereinstimmung ist durchaus gut. An der unteren Grenzfrequenz ist $\cos \alpha = 1$, also $\alpha = 0$. Der Stewartsche Ansatz würde dagegen $\alpha = \pi$ ergeben.

Beim Tieftondurchlasser sollten die Querwiderstände aus reinen Elastizitäten, also abgeschlossenen Luftkammern, bestehen. Durch die Verbindungsöffnung gegen die Hauptleitung werden die Verhältnisse allerdings insofern kompliziert, als man es mit einer Reihenschaltung einer Masse und einer Elastizität zu tun hat (vgl. Formel 1); die Abzweigungen stellen somit

1) G. W. Stewart, Phys. Rev. 28. S. 1038, 1926.

Helmholtzsche Luftresonatoren dar. Besitzt die Verbindungsöffnung die Leitfähigkeit c und die abgeschlossene Kammer das Volumen V_2 , so gilt

$$(14) \quad Z_2' = \frac{\omega \cdot \varrho}{c} - \frac{\varrho \cdot a^2}{\omega \cdot V_2}.$$

Daraus folgt

$$(15) \quad \cos \gamma = \frac{a}{2S_1 \cdot \omega} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{a^2}{\omega^2 \cdot V_2}} \cdot \sin\left(\frac{\omega l_1}{a}\right) + \cos\left(\frac{\omega l_1}{a}\right).$$

Die Grenzfrequenzen sind nach (10a) und (10b) bestimmt durch die Gleichungen

$$(16a) \quad \sin y = 0, \quad \cos y = 0,$$

$$(16b) \quad \cotg y = 4\beta y - \pi^2 \cdot g^2 \beta \frac{1}{y}, \quad -\tg y = 4\beta y - \pi^2 \cdot g^2 \beta \frac{1}{y},$$

wobei $g = \frac{\omega_R}{\omega_0}$ ist; $\omega_R = a \sqrt{\frac{c}{V_2}}$ ist der Eigenton des Resonators und $\omega_0 = \frac{a\pi}{l_1}$. Man sieht sofort, daß die Verhältnisse beim Tieftondurchlasser wesentlich komplizierter als beim Hochtondurchlasser sind. Während bei dem letzten das Verhalten durch zwei Größen y und β bestimmt ist, tritt beim Tieftondurchlasser als maßgebender Faktor noch die Größe g , also im wesentlichen der Eigenton des angesetzten Resonators hinzu. Für $g = 0$, d. h. für den Fall, daß das Volumen V_2 des Resonators unendlich groß oder mit anderen Worten seine Eigenfrequenz gleich Null ist, geht der Tieftondurchlasser in den Hochtondurchlasser über. Aber auch im Falle $g \neq 0$ verschwindet der Unterschied zwischen Tieftondurchlasser und Hochtondurchlasser bei Frequenzen, die groß gegen die Eigenfrequenz des Resonators sind, weil dann y sehr groß wird und damit die zweiten Glieder der Formeln für $\cotg y$ und $-\tg y$ gegenüber den ersten Gliedern verschwinden.

Wegen des Hinzutretens der Größe g läßt sich die Lage der Grenzfrequenzen beim Tieftondurchlasser nicht in einem einzigen Kurvenblatt schematisch darstellen; vielmehr müßte man die beim Hochtondurchlasser durchgeführte Konstruktion (Fig. 1) jetzt für unendlich viele g -Werte durchführen, um einen Überblick über sämtliche Tieftondurchlasser zu bekommen. Wichtig ist der Fall, daß g ganzzahlig ist. Aus Gl. (15) ergibt sich:

$$\cos \gamma = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{1}{\frac{\omega l_1}{a} - \frac{\pi^2 \cdot g^2 \cdot a}{\omega l_1}} \cdot \sin\left(\frac{\omega l_1}{a}\right) + \cos\left(\frac{\omega l_1}{a}\right).$$

Für ganzzahlige Werte von g hat das erste Glied von $\cos \gamma$ an der Stelle $\frac{\omega l_1}{a} = g \cdot \pi$ einen endlichen Grenzwert. Damit wird die Kurve für $\cos \gamma$ stetig, woraus sich gewisse Folgerungen namentlich für die Breite des Sperrgebietes ergeben.

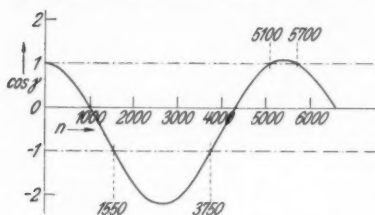


Fig. 5. $\cos \gamma$ -Kurve eines Tieftondurchlassers mit der Konstanten $g = 1$

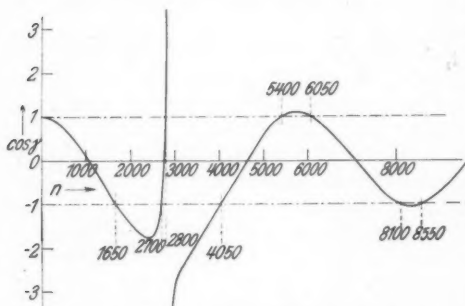


Fig. 6. $\cos \gamma$ -Kurve eines Tieftondurchlassers mit der Konstanten $g = 1,04$

Sperrbereiche für Tieftondurchlasser mit den Werten $g = 0,25$, $g = 1$ und $g = 2$ dargestellt. Die in der Fig. 7 gezeichnete Gerade $\beta = 1$ entspricht dem experimentell untersuchten Tieftondurchlasser (vgl. unten).

Fig. 10 zeigt Ergebnisse von Messungen an einem Tieftondurchlasser, der aus vier Gliedern bestand. Es war der Radius der Hauptleitung $r_1 = 1,39$ cm, $l_1 = 4,1$ cm. In jeder Abzweigungsebene befanden sich 6 Löcher, die die Verbindung mit den Luftkammern herstellten; die Abmessungen waren $r_2 = 0,16$ cm, $l_2 = 0,075$ cm, das Kammervolumen $V_2 = 39,3$ cm³. Infolgedessen war $\beta = 1$ und $g = 0,25$. Die Messungen sind hinter dem ersten Sperrgebiet abgebrochen; die theoretischen Grenz-

In den Figg. 5 bzw. 6 ist für zwei verschiedene Tieftondurchlasser spezieller Dimensionierung, die hier nicht weiter interessiert, $\cos \gamma$ als Funktion der Frequenz n (in Hertz) für $g = 1$ bzw. $g = 1,04$ dargestellt. Während an der Unstetigkeitsstelle der Fig. 6 das Sperrgebiet durch ein schmales Durchlässigkeitsgebiet unterbrochen wird, verschwindet dieses Durchlässigkeitsgebiet im Fall der Fig. 5.

In den folgenden Figg. 7, 8 u. 9 sind analog zu Fig. 1 beim Hochtondurchlasser die

frequenzen des Sperrgebietes sind $n_1 = 930$ und $n_2 = 1640$; sie sind sofort aus der Fig. 7 zu entnehmen, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{\omega_0}{2\pi} = 4150$ ist. Die Lage der Eigenfrequenz des Resonators ist in Fig. 10 mit n_R bezeichnet. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist durchaus befriedigend.

Von Göbel wurde in erster Linie versucht, den Grad der Dämpfung in den Sperrgebieten bei zahlreichen Filtern quantitativ festzustellen. Hierbei ergaben sich aus Intensitätsgründen methodische Schwierigkeiten, die noch nicht in befriedigender Weise behoben sind. Deshalb wollen

wir auf diese Messungen hier nicht eingehen, obwohl sie ebenfalls einige Resultate von allgemeinerer Bedeutung zu bringen scheinen. Über praktische Verwendungsmöglichkeiten einiger Filter besonderer Bauart wird gesondert berichtet werden.

Zum Schluß möchten wir noch darauf hinweisen, daß sich Stewart und Sharp¹⁾ in einer experimentellen Arbeit mit der Frage beschäftigt haben, ob der Theorie von Stewart oder der von Mason der Vorzug zu geben sei. Die Prüfung

1) G. W. Stewart u. C. W. Sharp, Journ. Opt. Soc. Amer. 19. S. 17. 1929.

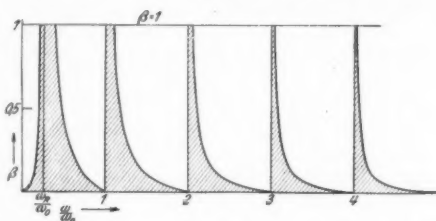


Fig. 7. Lage der Grenzfrequenzen der Tieftondurchlasser mit der Konstanten $g = 0,25$

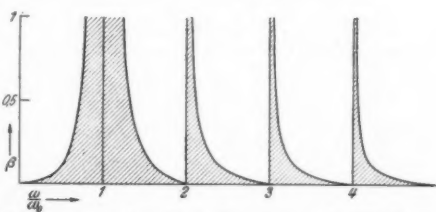


Fig. 8. Lage der Grenzfrequenzen der Tieftondurchlasser mit der Konstanten $g = 1$

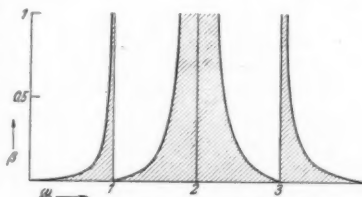


Fig. 9. Lage der Grenzfrequenzen der Tieftondurchlasser mit der Konstanten $g = 2$

geschah in grundsätzlich anderer Weise als bei uns. Es wird nicht die Durchlässigkeit gemessen, sondern es werden Impedanzmessungen angestellt. Die Verff. kommen zu dem Resultat, daß „die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie im allgemeinen befriedigend sei. Die einfachere Theorie

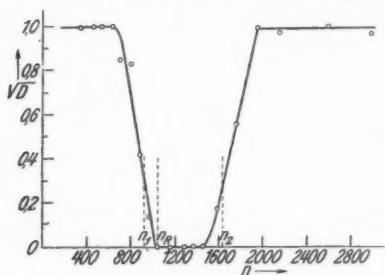


Fig. 10. Durchlässigkeit eines Tieftondurchlassers

von Stewart sei der Masonschen sichtlich unterlegen in der Berechnung der charakteristischen Impedanz des Hoch- und des Banddurchlassers. Beim Tieftondurchlasser bestehe kein merklicher Unterschied. Diese Vergleiche dürften nicht als allgemein bedeutungsvoll angesehen werden, sondern seien nur als Beispiele belehrend. Die vereinfachte Theorie von Stewart scheine für die Grenzfrequenzen gut auszureichen und sei viel leichter anzuwenden als die exaktere Theorie von Mason. Für viele Anwendungen akustischer Filter sei die erste ausreichend. Wir bemerken hierzu, daß die höheren Grenzfrequenzen gar nicht berücksichtigt werden, und daß allein schon ihr Auftreten, das aus unseren Rechnungen ohne weiteres folgt, eine unüberwindliche Schwierigkeit für die Stewartsche Theorie darstellt.

Breslau, den 10. Dezember 1931.

(Eingegangen 20. Dezember 1931)

Theorie der Sekundärelektronenemission aus Metallen

Von Herbert Fröhlich

Fallen auf ein Metall Kathoden- oder Kanalstrahlen, so werden von diesem Sekundärelektronen emittiert. Besonders bemerkenswert bei dieser Erscheinung ist, daß die Geschwindigkeitsverteilung dieser Sekundärelektronen sehr wenig von der Primärgeschwindigkeit abhängt, daß nämlich die meisten Sekundärelektronen sehr kleine Geschwindigkeiten haben, etwa bis zur Größenordnung 20 Volt. Dieses Problem soll hier theoretisch behandelt werden.

I. Der ungestörte Zustand

§ 1. Die Berechnungen sollen mit einem etwas modifizierten Bornschen Verfahren durchgeführt werden. Das bedingt zunächst, damit das Verfahren konvergiert, daß die Geschwindigkeit der Primärstrahlung größer als die Geschwindigkeit der Metallelektronen ist. Bei Kathodenstrahlen ist das infolge Existenz einer unteren Grenze für diesen Effekt (Größenordnung 10 Volt) ohnehin erfüllt. Bei Kanalstrahlen dagegen konvergiert das Verfahren erst für Geschwindigkeiten über 10 000 Volt. Wir wollen uns daher im folgenden ganz auf Kathodenstrahlen beschränken.

Ein ähnliches Problem ist für einzelne Atome von H. Bethe¹⁾ bearbeitet worden. Er bemerkte vor allem, daß sich die Rechnungen bedeutend vereinfachten, wenn man bei der Auswertung der Matrixelemente zuerst über den Raum der stoßenden Partikel integriert.

In der vorliegenden Arbeit soll aber nicht wie bei Bethe das Hauptgewicht auf die Streuung der einfallenden Strahlen gelegt werden, sondern auf das Verhalten der streuenden Elektronen. Natürlich ließe sich aus den Rechnungen auch die Streuung entnehmen. Man müßte dabei aber die unelastischen Zusammenstöße mit dem Metallgitter mitberücksichtigen. Das soll in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt werden.

§ 2. Es sei die Metalloberfläche in der Y—Z-Ebene und nach diesen Richtungen unendlich ausgedehnt. Die Be-

1) H. Bethe, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 325. 1930.

grenzung in der X -Richtung sei $\pm l$, d. h. also die Dicke ist $2l$. Das Potential sei so normiert, daß es außerhalb des Metalles ($|x| > l$) Null ist, dann ist es im Metallinnern $-W_a + V_p$, wo W_a das mittlere Gitterpotential und V_p das periodische Gitterpotential ist. Das Metallinnere nennen wir Gebiet I; $x < l$: Gebiet II; $x > l$: Gebiet III.

Die einfallende Strahlung soll aus dem Gebiet III senkrecht zur Metalloberfläche auftreffen. In diesem Fall bemerkt man zunächst, daß für freie Elektronen auf Grund von Energie- und Impulssatz eine Emission an der Eintrittsseite unmöglich ist, weil dazu eine Geschwindigkeitszunahme senkrecht zur Metalloberfläche nötig ist. Man wird daher die Bindung der Elektronen im Metall für die hier zu behandelnde Erscheinung als wesentlich betrachten müssen.

§ 3. Die Eigenfunktionen der Metallelektronen sind nur sehr ungenau bekannt. Sie lauten nach Bloch¹⁾ für ein kubisches Gitter mit der Periode a in einem unendlich ausgedehnten Metall $e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{v})} u(\mathbf{f}, \mathbf{r})$, wo u eine dreifach periodische Funktion mit der Periode a ist. [$\mathbf{r} = (x, y, z)$ ist der Ortsvektor der Metallelektronen.] Das heißt also

$$u(\mathbf{f}, \mathbf{r}) = \sum_{n_1, n_2, n_3} a(\mathbf{f})_{n_1, n_2, n_3} e^{\frac{2\pi i}{a} (n_1 x + n_2 y + n_3 z)}.$$

Man kann annehmen, daß die a_{n_1, n_2, n_3} mit wachsenden Indizes sehr rasch abnehmen (für ein Potential von der Form $A_x \cos \alpha x + A_y \cos \alpha y + A_z \cos \alpha z$ sind sie von Morse²⁾ berechnet worden). Da die erste Näherung (nur $a_{0,0,0}$, freie Elektronen!), wie oben ausgeführt wurde, für dieses Problem nicht genügt, kann man versucht sein, von vornherein mit nur drei Koeffizienten $a_{0,0,0}$, $a_{-1,0,0}$, $a_{1,0,0}$ auszukommen. (In der Y - und Z -Richtung genügt natürlich dann die erste Näherung.) Dadurch käme man aber in Konflikt mit der Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen, z. B. bei den Eigenfunktionen

$$(a_{0,0,0} e^{ik_x x} + a_{1,0,0} e^{i(k_x + \frac{2\pi}{a})x} + a_{-1,0,0} e^{i(k_x - \frac{2\pi}{a})x}) e^{ik_y y + ik_z z}$$

und

$$(a'_{0,0,0} e^{ik'_x x} + a'_{1,0,0} e^{i(k'_x + \frac{2\pi}{a})x} + a'_{-1,0,0} e^{i(k'_x - \frac{2\pi}{a})x}) e^{ik_y y + ik_z z}$$

mit $k'_x = k_x + \frac{2\pi}{a}$! Man muß also, auch wenn die Koeffi-

1) F. Bloch, *Ztschr. f. Phys.* 52. S. 555. 1930.

2) P. M. Morse, *Physic. Rev.* 35. S. 1311. 1930.

zienten a sehr rasch abnehmen, in bezug auf die X-Komponente zunächst alle berücksichtigen.

Daß wir in der Y- und Z-Komponente nur mit der Näherung der freien Elektronen rechnen ist kein Widerspruch zum Vorhergehenden, denn wir haben ja zur Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung zwei Möglichkeiten: entweder nur das erste Glied oder sämtliche Glieder. Wir schreiben im folgenden für $a_{n,0,0}$ kurz a_n .

Wir haben bei unserem Metallmodell eine kontinuierliche Y- und Z-Komponente der Energie. Die X-Komponente besteht, wie Morse (a. a. O.) gezeigt hat, aus einzelnen Banden, deren Breite mit zunehmender Energie zunimmt, während die Breite der verbotenen Gebiete zwischen den Banden abnimmt. Die Zahl der Eigenfunktionen ist innerhalb jeder Bande gleich groß, nämlich doppelt so groß wie die Zahl der Gitterpunkte. Für im Metall gebundene Elektronen, d. h. für solche, deren Energie < 0 ist, hat man — infolge der endlichen Metalldicke — diskretes Spektrum innerhalb jeder Bande. Die Eigenfunktionen sind in den einzelnen Gebieten ähnlich gebaut wie bei freien Elektronen.¹⁾ Sie lauten:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{In I : } \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\pi} \left(b^+ \sum a_n e^{i(k_x + \frac{2\pi n}{a})x} \right. \\ \quad \left. + b^- \sum a_n e^{i(-k_x + \frac{2\pi n}{a})x} \right) e^{i(k_y y + k_z z)} \\ \text{In II : } \frac{1}{\pi} b_{II} e^{\alpha x} e^{i(k_y y + k_z z)} \\ \text{In III : } \frac{1}{\pi} b_{III} e^{-\alpha x} e^{i(k_y y + k_z z)} \end{array} \right\} = \varphi(\mathfrak{f}).$$

$$(1a) \quad \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \alpha^2 = -E(k_x).$$

$E(k_x)$ ist die x-Komponente der Elektronenenergie. Es ist $|b^+| = |b^-| = 1$. Die Konstanten b lassen sich aus den Stetigkeitsbedingungen der Eigenfunktionen in $x = \pm l$ berechnen. Die Y- und Z-Komponenten sind nach $dk_y \cdot dk_z$ normiert.

§ 4. Die einfallende Welle werde in allen drei Gebieten durch $N_0(\mathfrak{R}) e^{i(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R})}$ beschrieben.²⁾ \mathfrak{R} = Ausbreitungsvektor; $\mathfrak{R} = (X, Y, Z)$ = Ortsvektor.

$$(2) \quad N_0(\mathfrak{R}) = \sqrt{\frac{2\pi m}{e \hbar K}}.$$

1) H. Fröhlich, Ann. d. Phys. [5] 7, S. 103. 1930.

2) In der hier benutzten Näherung kann man den Brechungsindex für die einfallende Welle 1 setzen.

Die Normierung ist dann so gewählt, daß der Strom 1 durch die Flächeneinheit tritt. Das einfallende Teilchen soll aus dem Gebiet III senkrecht zur Metalloberfläche einfallen, d. h. es ist

$$(2a) \quad \mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_x, 0, 0), \quad \mathfrak{R}_x < 0^1); \quad |\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}_x| = K.$$

Der Anfangszustand ist also:

$$(3) \quad \psi_0 = \varphi(\mathfrak{f}) N_0(\mathfrak{R}) e^{i(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})}.$$

II. Durchführung der Rechnungen

Wir wollen in diesem Abschnitt nur die mathematische Behandlung bringen und sämtliche physikalischen Diskussionen auf den nächsten Abschnitt verlegen.

§ 5. Die Durchführung der Rechnungen soll nach der sogenannten stationären Methode geschehen. Zwar bietet im allgemeinen die nichtstationäre Methode gewisse Vorteile, wenn es sich um Berechnung von Endzuständen, die im kontinuierlichen Spektrum liegen, handelt, doch wird das im vorliegenden Fall weit dadurch aufgewogen, daß man zur Berechnung der Eigenfunktionen bedeutend weniger Integrationen durchzuführen hat.

Das Störungspotential ist $\frac{e^2}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}|}$, e = Elektronenladung. Die Lösung wird in üblicher Weise angesetzt zu $\psi = \psi_0 + \psi_1$; $\psi_1 \ll \psi_0$. Für ψ_1 gilt die Differentialgleichung

$$(4) \quad \Delta_{\mathfrak{r}} + \Delta_{\mathfrak{R}} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E(\mathfrak{f}) - V) + K^2, \quad \psi_1 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{e^2}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}|} \psi_0.$$

Dabei ist $E(\mathfrak{f})$ die Energie des Elektrons. $V = -W + V$ im Metallinnern und $V = 0$ außerhalb des Metalls (vgl. § 2). $\Delta_{\mathfrak{r}}$ und $\Delta_{\mathfrak{R}}$ sind die Laplaceschen Operatoren für (x, y, z) und (X, Y, Z) . Die Lösung kann man sich nach den Eigenfunktionen des ungestörten Problems entwickelt denken. Sie hat die Form

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_1 = \sum_{\mathfrak{r}', \mathfrak{R}'} A_{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}'} \varphi(\mathfrak{f}', \mathfrak{r}) N(\mathfrak{R}') e^{i(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})} = \sum_{\mathfrak{R}'} \varphi^{\mathfrak{R}'}(\mathfrak{r}) N(\mathfrak{R}') e^{i(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})} \\ \text{mit } \varphi^{\mathfrak{R}'}(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}'} A_{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}'} \varphi(\mathfrak{f}, \mathfrak{r}). \end{cases}$$

Die Summen sollen dabei für Eigenfunktionen im Kontinuierlichen als Integrale aufgefaßt werden. $N(\mathfrak{R})$ ist Normierungs-

1) Der Zeitfaktor ist also $e^{-\frac{2\pi i}{h} Et}$.

faktor. $e^{i(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})}$ sei im Impulsraum normiert, d. h. also für $d\mathfrak{R}' = d\mathfrak{R}'_x d\mathfrak{R}'_y d\mathfrak{R}'_z$; es ist dann

$$(5a) \quad N(\mathfrak{R}') = \frac{1}{\pi^{3/2}}.$$

Wir multiplizieren (4) mit $N(\mathfrak{R}'') e^{-i(\mathfrak{R}'', \mathfrak{R})}$ und integrieren über $d\mathfrak{R} = dX dY dZ$. Wir stoßen dabei auf das Integral

$$\int \frac{e^{i(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}') \mathfrak{R}}}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}|} d\mathfrak{r}_{\mathfrak{R}}.$$

Wie Bethe (a. a. O.) gezeigt hat, hat es den Wert

$$\frac{4\pi}{(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')^2} e^{i(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}') \mathfrak{r}}.$$

Damit und unter Berücksichtigung von (3), (5) und der Orthogonalitätsbedingungen erhalten wir dann aus (4):

$$(6) \quad \Delta_{\mathfrak{r}} + \kappa(E(\mathfrak{f}) - V) + (K^2 - K''^2), \quad \varphi^{\mathfrak{R}''} = C e^{i(\mathfrak{S}, \mathfrak{r})} \varphi(\mathfrak{f}).$$

$$(6a) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{8\pi^2 m}{h^2}, & C = \kappa \frac{4\pi e^2}{\mathfrak{S}^2} N_0(\mathfrak{R}), \\ \mathfrak{S} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}', \text{ d. h. } \mathfrak{S}_x = \mathfrak{R}_x - \mathfrak{R}'_x, \\ \mathfrak{S}_y = -\mathfrak{R}'_y, \quad \mathfrak{S}_z = -\mathfrak{R}'_z. \end{cases}$$

Wegen (1) können wir setzen: $\varphi^{\mathfrak{R}''} = F(x)G(y, z)$, mit

$$(7) \quad G = \frac{1}{\pi} e^{i(\mathfrak{S}_y + k_y)y + i(\mathfrak{S}_z + k_z)z}$$

und erhalten damit aus (6)

$$(8) \quad \begin{cases} \text{In I: } \frac{d^2 F^I(x)}{dx^2} + (k'^2 - \kappa V_p) F^I = C e^{i\mathfrak{S}_x x} \varphi^I(k_x), \\ \text{In III: } \frac{d^2 F^{III}(x)}{dx^2} + k_{III}^2 F^{III} = C e^{i\mathfrak{S}_x x} \varphi^{III}(k_x). \end{cases}$$

$\varphi(k_x)$ ist die X-Komponente von $\varphi(\mathfrak{f})$ [vgl. (1)].

$$(9) \quad k'^2 = \kappa(E(\mathfrak{f}) + W_a) + (K^2 - K''^2) - (\mathfrak{S}_y + k_y)^2 - (\mathfrak{S}_z + k_z)^2.$$

$$(9a) \quad k_{III}^2 = k'^2 - \kappa W_a.$$

§ 6. Wir suchen Lösungen von (8), die in II und III auslaufende Wellen darstellen (Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingungen). Es muß also $k_{III}^2 > 0$, d. h. $k'^2 > \kappa W_a$ sein (Emissionsbedingung!). In diesem Fall können wir in (8) κV_p gegen k'^2 vernachlässigen. Das bedeutet ja nur, daß für Elektronen, deren Energie so groß ist, daß sie aus dem Metall austreten können, das Gitterfeld nicht sehr wesentlich ist.

Die rechte Seite in (8) ist nun nach (1) im Gebiet I eine Summe von Exponentialfunktionen. Eine Partiallösung ist also:

$$(10) \quad \begin{cases} \text{In I: } F_P^{\text{I}} = \sum c_n^+ e^{i(k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x)x} \\ \quad + \sum c_n^- e^{i(-k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x)x} \\ \text{In II: } F_P^{\text{II}} = c^{\text{II}} e^{(a + i\mathfrak{E}_x)x} \\ \text{In III: } F_P^{\text{III}} = c^{\text{III}} e^{(-a + i\mathfrak{E}_x)x} \end{cases}$$

Durch Einsetzen in (8) erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} c_n^\pm = \frac{C \cdot a_n^\pm}{\left(k'^2 \left(\pm k_x + \frac{2\pi n}{h} + \mathfrak{E}_x\right)^2\right)}, & a_n^\pm = \frac{a_n b^\pm}{\sqrt{2l}}, \\ c^{\text{III}} = \frac{C b^{\text{III}}}{k_{\text{III}}'^2 + (-a + i\mathfrak{E}_x)^2} \end{cases}$$

Also ist die vollständige Lösung von (8):

$$(12) \quad \begin{cases} \text{In I: } F^{\text{I}} = F_P^{\text{I}} + d_1 e^{ik'x} + d_2 e^{-ik'x} \\ \text{In II: } F^{\text{II}} = F_P^{\text{II}} + d_{\text{II}} e^{-ik'_{\text{III}}x} \\ \text{In III: } F^{\text{III}} = F_P^{\text{III}} + d_{\text{III}} e^{ik'_{\text{III}}x} \end{cases}$$

Die vier Konstanten d sind aus den Stetigkeitsbedingungen $x = \pm l$ zu bestimmen (vier inhomogene Gleichungen). Die beiden ersten heißen, wenn man die inhomogenen Teile auf die linke Seite bringt:

$$(13_1) \quad F_P^{\text{I}}(l) - F_P^{\text{III}}(l) + d_1 e^{ik'l} + d_2 e^{-ik'l} = d_{\text{III}} e^{ik'_{\text{III}}l}.$$

$$(13_2) \quad \frac{d}{dx} F_P^{\text{I}}(l) - \frac{d}{dx} F_P^{\text{III}}(l) + ik'd_1 e^{ik'l} - ik'd_2 e^{-ik'l} = ik'_{\text{III}} d_{\text{III}} e^{ik'_{\text{III}}l}.$$

Von den Konstanten c_n^\pm werden immer diejenigen, für die $k'^2 \approx \left(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x\right)^2$ ist, groß gegen alle anderen sein ($c_{n \text{ Res}}^\pm$). Ist diese Relation für kein c_n^\pm erfüllt, so werden alle c und damit auch alle d klein. Man kann sich also darauf beschränken, die d (die als Funktion der k' bekannt sein sollen) nur in der Nähe von solchen Resonanzstellen zu berechnen. Die Bedeutung dieser Stellen ist der Impulssatz für die n te Partialwelle der Eigenfunktionen. Bei den c^{II} und c^{III} treten nie solche Resonanznenner auf [vgl. (11)].

Es ist naheliegend, von sämtlichen Konstanten c_n^\pm nur immer die $c_{n \text{ Res}}^\pm$ zu berücksichtigen. Das führt aber, wenn \mathfrak{E}_x

sehr klein wird, zu Widersprüchen. Für kleine \mathfrak{S}_x wird nämlich die rechte Seite in (8) ungefähr $C \varphi(k_x)$. Es soll gleichzeitig K so anwachsen, daß $K^2 - K'^2 = \mathfrak{S}(K + K')$ so groß bleibt, daß $k_{II}^2 > 0$, daß also Emission stattfinden kann. Die Partiallösung von (8) nähert sich dann dem Wert $\frac{C}{K^2 - K'^2} \varphi(k_x)$, denn es ist ja, weil $\varphi(k_x)$ Lösung der ungestörten Gleichung ist,

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(k_x) = (k'^2 - \kappa V_p - (K^2 - K'^2)) \varphi(k_x)$$

[vgl. (9) mit $\mathfrak{S} = 0$].

Würde man aber in (13) nur $c_{n \text{ Res}}^\pm$ berücksichtigen, so erhielte man für kleine \mathfrak{S}_x ein ganz anderes Resultat. Es handelt sich also jetzt darum, die unendlich vielen kleinen Konstanten c in geeigneter Weise zu berücksichtigen. Dazu bemerken wir folgendes:

Erstens: wegen der vorstehenden Überlegung ist:

$$(14_1) \quad \begin{cases} (F_P^I(l))_{\mathfrak{S}_x=0} = \left(\sum c_n^+ (\mathfrak{S}_x) e^{i(k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{S}_x)l} + \sum c_n^- \dots \right)_{\mathfrak{S}=0} \\ = \frac{C}{K^2 - K'^2} \varphi^I(k_x, l). \end{cases}$$

$$(14_2) \quad \begin{cases} (F_P^{III}(l))_{\mathfrak{S}_x=0} = c_{\mathfrak{S}=0}^{III} e^{-\alpha l} = \frac{C}{K^2 - K'^2} \varphi^{III}(k_x, l) \\ = \frac{C}{K^2 - K'^2} \varphi^I(k_x, l). \end{cases}$$

Letzteres wegen der Stetigkeit der Eigenfunktionen.

Zweitens: Die inhomogenen Glieder der Gl. (13) heben sich bei Annäherung von F_P an $\text{const } \varphi(k_x)$ heraus, denn $\varphi(k_x)$ ist ja eine Eigenfunktion und für diese sind die Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Die Summe aller inhomogenen Glieder in jeder Gl. (13) muß also verschwinden, wenn \mathfrak{S} Null wird.

Wir betrachten in der nachfolgenden Überlegung nur (13₁); für (13_{2,3,4}) gilt alles entsprechend. Wir suchen einen einfachen Ausdruck für das inhomogene Glied in (13₁), $F_P^I(l) - F_P^{III}(l)$ für kleine \mathfrak{S}_x . Für $\mathfrak{S}_x = 0$ ist, wie eben auseinandergesetzt wurde (14₂), $F_P^I(l) = F_P^{III}(l)$ (Stetigkeit der Eigenfunktionen). Für wachsende \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} \ll \alpha$) ändern sich in den Ausdrücken (10) für die F_P sämtliche Koeffizienten c_n langsam mit Ausnahme von $c_{n \text{ Res}}$ [vgl. (11)]. Wir bilden jetzt den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 F_P^I(l) - F_P^{III}(l) &= F_P^I(l) - F_P^{III}(l) - (F_P^I(l) - F_P^{III}(l))_{\mathfrak{E}=0} \\
 &= \sum c_n^+ (\mathfrak{E}) e^{i(k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x)l} - \sum (c_n^+)_{\mathfrak{E}=0} e^{i(k_x + \frac{2\pi n}{a})l} \\
 &\quad + \sum c_n^- (\mathfrak{E}) \dots - \sum (c_n^-)_{\mathfrak{E}=0} \dots \\
 &\quad + c_{III} e^{i(\mathfrak{E}_x - a)l} - (c_{III})_{\mathfrak{E}=0} e^{-al}.
 \end{aligned}$$

Hier heben sich dann für kleine \mathfrak{E}_x sämtliche Glieder in höherer Ordnung weg mit Ausnahme der Glieder mit $c_{n \text{ Res}}^\pm$ [vgl. (11)].

Es bleibt also der inhomogene Teil von (13₁) für $|\mathfrak{E}| \ll a$

$$F_P^I(l) - F_P^{III}(l) = c_{n \text{ Res}}^\pm e^{i(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x)l} - c_{n \text{ Res}}^\pm (0) e^{i(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a})l}$$

mit

$$c_{n \text{ Res}}^{(0)} = (c_{n \text{ Res}})_{\mathfrak{E}=0}. \quad |\mathfrak{E}| \ll a.$$

Wir haben bei der Lösung der Gl. (13) jetzt also zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich: 1. $|\mathfrak{E}_x| \neq \ll a$; 2. $|\mathfrak{E}_x| \ll a$. Die beiden ersten Gl. (13) lauten dann:

Für Fall 1:

$$(13_1) \quad c_{n \text{ Res}}^\pm e^{i\beta l} + d_1 e^{ik'l} + d_2 e^{-ik'l} = d_{III} e^{ik_{III}l}.$$

$$(13_2') \quad \beta c_{n \text{ Res}}^\pm e^{i\beta l} + k' d_1 e^{ik'l} - k' d_2 e^{-ik'l} = k_{III}' d_{III} e^{ik_{III}l}.$$

Für Fall 2:

$$(13_1'') \quad c_{n \text{ Res}}^\pm e^{i\beta l} - c_{n \text{ Res}}^\pm (0) e^{i\beta l} + \dots = \dots$$

$$(13_2'') \quad \beta c_{n \text{ Res}}^\pm e^{i\beta l} - \beta_0 c_{n \text{ Res}}^\pm (0) e^{i\beta l} + \dots = \dots,$$

wobei

$$(15) \quad \beta = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x, \quad \beta_0 = (\beta)_{\mathfrak{E}=0},$$

also wegen (11) und (15):

$$(16) \quad c_{n \text{ Res}}^\pm = \frac{C a_{n \text{ Res}}^\pm}{k'^2 - \beta^2} = \frac{\pm C a_{n \text{ Res}}}{\sqrt{2l(k'^2 - \beta^2)}}.$$

Entsprechende Gleichungen erhält man für (13_{3,4}). Sämtliche Gleichungen gelten nur für $\beta \approx \pm k'$; für alle anderen β werden die d , wie am Anfang dieses Paragraphen ausgeführt wurde, verschwindend klein.

Wir setzen:

$$d_{III} = d_{III} e^{i(k_{III}' - k')l},$$

$$d_{II} = d_{II} e^{i(k_{III}' - k')l}$$

und beachten zunächst, daß wegen (13')

$$d^{\text{II}} = - \frac{k'_{\text{III}} - \beta}{k'_{\text{III}} + \beta} e^{i k' l} d^{\text{III}}$$

oder mit

$$\left(\frac{k'_{\text{III}} - k'}{k'_{\text{III}} + k'} \right)^2 = R : \begin{cases} |d^{\text{II}}|^2 = R |d^{\text{III}}|^2 & \text{für } \beta = +k', \\ |d^{\text{III}}|^2 = R |d^{\text{II}}|^2 & \text{für } \beta = -k'. \end{cases}$$

R ist der Reflexionskoeffizient der Potentialschwelle.

Die Bedeutung dieser Relationen ist folgende: Für $\beta = +k'$ wird ins Gebiet III eine Welle emittiert; infolge der Reflexion an der Potentialschwelle wird aber dadurch auch ins Gebiet II eine Welle ausgesandt. (Für $\beta = -k'$ gilt das Entsprechende im Gebiet III.) Für einigermaßen große k'_{III} ist R allerdings sehr klein. Wir wollen R dauernd Null setzen, und zwar nicht nur, weil R ohnehin klein ist, sondern hauptsächlich, weil die reflektierte Welle bei Berücksichtigung einer Absorption im Metall nie zum Austritt gelangen kann. Insbesondere ist sie für die langsamen Elektronen, für die R nicht klein wird, besonders groß. Wir interessieren uns nun nur für ins Gebiet III emittierte Wellen, d. h. für d^{III} und positive β .

Wir erhalten aus (13') im Falle 1:

$$(17) \quad d^{\text{III}} = 2 i c_{\text{Res}} \frac{\beta}{k'_{\text{III}} + \beta} \sin(\beta - k') l.$$

Im Fall 2 aus (13''):

$$(17'') \quad d^{\text{III}} = 2 i c_{\text{Res}} \frac{\beta}{k'_{\text{III}} + \beta} \sin(\beta - k') l - c_{\text{Res}}^{(0)} \frac{\beta_0}{k'_{\text{III}} + \beta_0} \sin(\beta_0 - k') l.$$

Für c_{Res} ist jeweils das c_n^{\pm} einzusetzen, für das bei dem betreffenden Wert von β (> 0) Resonanz eintritt.

§ 7. Der wesentliche Teil der Lösung von (8) im Gebiet III lautet also $F^{\text{III}} = d^{\text{III}} e^{i k' z}$ in der Umgebung aller Resonanzstellen $+k' \approx \beta$ und $F^{\text{III}} = 0$ für alle anderen k' . Der inhomogene Teil ist unwesentlich, weil er exponentiell abfällt und daher keinen Beitrag zur Emission liefert.

Wir erhalten mit (5) als Lösung unserer Störungsgl. (4) im Gebiet III:

$$(18) \quad \psi = \int N(\mathfrak{R}') e^{i(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})} d^{\text{III}}(\mathfrak{R}') e^{i k'_{\text{III}}(\mathfrak{R}') x + i(\mathfrak{E}_y + k_y) y + i(\mathfrak{E}_z + k_z) z} d\mathfrak{R}',$$

wobei die Integration über alle \mathfrak{R}' , die zu reellen k'_{III} führen, zu erstrecken ist.

Wir bilden den Strom in III. Infolge der Normierung der $Y-Z$ -Komponente erhalten wir für die Stromstärke J :

$$J = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \int \left(\psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right) d\tau_{\text{III}}.$$

Mittelung! Es ist dabei die Integration nach dy und dz über die ganze $Y-Z$ -Ebene und nach $dk_y dk_z$ über ein kleines Intervall ausgeführt. Das läuft wegen der Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung im wesentlichen auf eine Mitteilung über die y - und z -Komponenten hinaus. Es wird dann mit (18), wenn man die Integration nach $d\tau_{\text{III}}$ ausführt und die Orthogonalitätsbedingungen beachtet:

$$J = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \int k_{\text{III}}' |d\text{III}|^2 d\mathfrak{R}'$$

oder mit (17) und (16):

$$\begin{aligned} (19') \quad J' & \left\{ \begin{aligned} &= \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \sum_n \int \frac{2}{l} k_{\text{III}}' |a_{n \text{ Res}}|^2 C^2 \left\{ \left[\frac{\beta}{k_{\text{III}}' + \beta} \frac{\sin(\beta - k')l}{(\beta + k')(\beta - k')} \right]^2 \right. \\ & \left. - ([...] - [...])_{\beta = \beta_0}^2 \right\} d\mathfrak{R}' \end{aligned} \right. \\ (19'') \quad J'' & \end{aligned}$$

$$d\mathfrak{R}' = d\mathfrak{R}_x' d\mathfrak{R}_y' d\mathfrak{R}_z'.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Resonanzglieder mit positiven β und reellen k_{III} unter Berücksichtigung, daß k_x positiv und negativ zu nehmen ist.

§ 8. Wir führen zunächst die Integration über $d\mathfrak{R}_x'$ aus.

Fall 1: Wegen des Gliedes $\frac{\sin^2(\beta - k')l}{(\beta - k')^2}$ ist die Integration leicht auszuführen, denn wir haben ja nur in der Umgebung von $\beta = k'$ zu integrieren und kommen daher nicht in die Nähe von $\beta = -k'$ und $\beta = -k_{\text{III}}$.

Wir erhalten:

$$(20') \quad J' = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \frac{n}{2} \sum_n \int C (\mathfrak{R}_y' \mathfrak{R}_z')^2 |a_n|^2 \frac{k_{\text{III}}'}{(k_{\text{III}}' + k')^2} d\mathfrak{R}_y' d\mathfrak{R}_z'.$$

Die Summe läuft über alle Resonanzen, die zu einer Emission nach III führen.

Fall 2: Hier haben wir im wesentlichen ein Integral von folgender Form auszuführen:

$$\mathfrak{I} = \int \left(f(x) \frac{\sin x}{x} - f(x + \varepsilon) \frac{\sin(x + \varepsilon)}{x + \varepsilon} \right)^2 dx, \quad \varepsilon \ll 1,$$

$f(x)$ langsam veränderlich, Integration in der Umgebung von $x = 0$; wir dehnen sie so weit aus, daß der Integrand ver-

schwindend klein wird. Der Wert des Integrals ändert sich dabei sehr wenig. Dann erhalten wir zunächst:

$$\Im = \pi f(0)^2 + \pi f(-\epsilon)^2 - 2 \Im_1,$$

$$\Im_1 = \int f(x) f(x + \epsilon) \frac{\sin x \sin (x + \epsilon)}{x(x + \epsilon)} dx.$$

Der Integrand von \Im_1 hat keine Pole im Integrationsgebiet; wir können also den Integrationsweg etwas in die positiv imaginäre Halbebene verschieben.

Es wird

$$\begin{aligned} -4 \Im_1 &= \int f(x) f(x + \epsilon) e^{ix} \frac{e^{2ix} - 1}{x(x + \epsilon)} dx \\ &\quad + \int f(x) f(x + \epsilon) e^{-ix} \frac{e^{-2ix} - 1}{x(x + \epsilon)} dx. \end{aligned}$$

Wir können, ohne den Wert von \Im_1 wesentlich zu verändern, die einzelnen Integrale zu vollen Umläufen ergänzen, und zwar das erste über die positiv imaginäre und das zweite über die negativ imaginäre Halbebene. Das erste Integral wird Null, das zweite liefert:

$$-4 \Im_1 = 4\pi f(0) f(-\epsilon).$$

Es wird dann

$$\Im = \pi (f(0) - f(-\epsilon))^2.$$

Wir können dieses Ergebnis für unseren Fall 2 verwenden. Dabei ist $x = (\beta - k)l$; $\epsilon = (\beta - \beta_0)l$. Die Bedeutung von f geht ohne weiteres aus (19'') hervor.

Es wird

$$\begin{aligned} (20'') \quad \left\{ \begin{aligned} J'' &= \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \frac{\pi}{2} \sum_n \int C^2 |a_n|^2 \left(\frac{\sqrt{k_{III}}}{k_{III} + k'} - \frac{\sqrt{k'_{III}}}{k'_{III} + k_0'} \right)^2 \\ &\quad \cdot d\Re_y d\Re_x \\ J'' &\approx \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi} \frac{\pi}{2} \sum_n \int C^2 |a_n|^2 \frac{k_{III}}{(k_{III} + k')^4} \\ &\quad \cdot (k' - k_0')^2 d\Re_y' d\Re_z'; \quad k_0' = (k')\varepsilon = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Über die Summation gilt das für Fall 1 Gesagte.

§ 9. Bestimmung der Resonanzen: Wir suchen die Lösung der Gleichung

$$(21) \quad k'^2 = \left(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \varepsilon_x \right)^2,$$

wo für k'^2 der Wert aus (9) einzusetzen ist.

Wir setzen

$$-x(E(k) + W_a) + k^2 = \Delta E > 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$-W_a + \frac{k^2}{\pi}$ wäre die Energie des Elektrons, wenn man das Gitterpotential vernachlässigen würde. Wir berücksichtigen, daß

$$(6a) \quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{R}_x - \mathfrak{R}_x', \quad \mathfrak{E}_y = -\mathfrak{R}_y', \quad \mathfrak{E}_z = -\mathfrak{R}_z'$$

ist, und erhalten mit (9) und (21):

$$0 = \frac{\Delta E}{2} - K'^2 - \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} + \mathfrak{R}_x' \left(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{R}_x \right) \mp k_x \frac{2\pi n}{a} + (\mathfrak{R}_x', \mathfrak{I}_x'),$$

wobei

$$\mathfrak{R}_x' = (\mathfrak{R}_y', \mathfrak{R}_z') \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_x' = (\mathfrak{I}_y', \mathfrak{I}_z').$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet, wenn wir $\pm k_x + \frac{2\pi n}{a}$ gegen \mathfrak{R}_x vernachlässigen:

$$2 \mathfrak{R}_x' = \mathfrak{R}_x + \sqrt{\mathfrak{R}_x^2 - 4D}$$

$$(22) \quad D = \mathfrak{R}_x'^2 - (\mathfrak{R}_x', \mathfrak{I}_x') + \frac{\Delta E}{2} + \frac{2\pi n}{a} \left(\pm k_x + \frac{\pi n}{a} \right)$$

Laut Voraussetzung ist \mathfrak{R}_x negativ; damit

$$k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x$$

für nicht zu große n positiv wird, müssen wir daher vor der Wurzel das positive Vorzeichen wählen. Ferner ist

$$\mathfrak{R}_x^2 = K^2 \gg D.$$

Das folgt ohne weiteres aus der Voraussetzung, die über die Größe von K gemacht wurde, und aus der Bedingung, daß $k'^2 > \pi W_a$ ist. Es wird also \mathfrak{R}_x' , wenn wir die Wurzel entwickeln:

$$(23) \quad \mathfrak{R}_x' = \mathfrak{R}_x - \frac{D}{\mathfrak{R}_x}; \quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{R}_x - \mathfrak{R}_x' = \frac{D}{\mathfrak{R}_x}$$

und

$$(23a) \quad k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathfrak{E}_x \approx \pm k_x + \frac{2\pi n}{a}.$$

Von diesen k' -Werten benutzen wir, wie am Ende von § 6 ausgeführt wurde, diejenigen, für die $k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} > 0$ und gleichzeitig $k'^2 > \pi W_a$ ist.

Wir ersehen daraus, daß für $n = 0$, d. h. in der Näherung der freien Elektronen keine Emission zu erwarten ist, was wir ja anfangs schon behaupteten.

§ 10. Wir wollen nun zur Berechnung der emittierten Ströme die Integrale (20') und (20'') auswerten. Zunächst

können wir nach (23) berechnen, was die beiden Fälle 1 und 2 für die Geschwindigkeit der Primärstrahlen $\frac{hK}{2\pi m}$ bedeuten.

Es war

$$\text{Fall 1: } \mathfrak{E}_x \neq \ll \alpha; \quad \text{Fall 2: } \mathfrak{E}_x \ll \alpha$$

mit

$$\alpha^2 = -\kappa E(k_x) \text{ [vgl. (1a)].}$$

α^2/κ ist also die Energie, die nötig ist, um ein Elektron (\mathfrak{E}) aus dem Metall zu entfernen. Aus dem lichtelektrischen Effekt weiß man, daß die Größenordnung von $E(k_x)$ 10 Volt ist. Die Größenordnung von $|\mathfrak{E}_x| = \frac{D}{K}$ ist im wesentlichen gegeben durch $\frac{2\pi n}{a} \frac{k'}{K}$. Wegen $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ hat $\frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2$ ebenfalls die Größenordnung 10 Volt. Aus $K = \frac{D}{|\mathfrak{E}_x|}$ folgt also:

$$(24) \quad \text{Fall 1: } K \neq \gg k'n; \quad \text{Fall 2: } K \gg k'n.$$

Fall 1: Zur Auswertung von (20') setzen wir

$$(25) \quad C_1 = C \mathfrak{E}^2;$$

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_x^2 + K_e'^2; \quad \mathfrak{K}_e'^2 = K_e'^2 = \mathfrak{E}_e'^2; \quad (\mathfrak{K}_e', \mathfrak{f}_e) = K_e' k_e \cos \varphi.$$

Dann wird (20'):

$$J' = \frac{e}{m} \frac{h}{8} \sum_n |a_n|^2 C_1^2 \int \frac{K_{\text{III}}}{(k'_{\text{III}} + k')^2} \frac{K_e' dK_e' d\varphi}{(\mathfrak{E}_x^2 + K_e'^2)^2}.$$

Im Integral können wir nach (23) setzen:

$$k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a}; \quad k'_{\text{III}} = (k'^2 - \kappa W_a)^{1/2}$$

und erhalten:

$$(26) \quad J' = \frac{e}{m} \frac{h}{8} \sum_n |a_n|^2 C_1^2 \frac{K_{\text{III}}}{(k'_{\text{III}} + k')^2} L'$$

mit

$$L' = \int_0^M \int_0^{2\pi} \frac{K_e' dK_e' d\varphi}{\left[\frac{1}{K^2} (K_e'^2 - K_e' k_e \cos \varphi + g^2) + K_e'^2 \right]^2},$$

$$(27) \quad g^2 = \frac{DE}{2} + \frac{2\pi n}{a} \left(\pm k_x + \frac{\pi n}{a} \right).$$

Wir bestimmen M , die obere Grenze von K_e' , aus der Bedingung

$$k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} + \frac{D}{\mathfrak{K}_x} > (\kappa W_a)^{1/2} \text{ (Emissionsbedingung).}$$

Mit (22) und (27) folgt, wenn wir über $\cos \varphi$ mitteln und beachten, daß \Re_x negativ ist:

$$K_e'^2 \leq K \left(\pm k_x + \frac{2\pi n}{a} - (x W_a)^{1/2} \right) - g^2 = M^2 \ll K^2.$$

Wir erhalten für L' , wenn wir im Nenner

$$K_e'^2 + k_e'^2 \cos^2 \varphi + 2g^2 - 2K_e' k_e' \cos \varphi$$

gegen K^2 vernachlässigen, mit der Abkürzung $y = K_e'^2$:

$$L' = K^4 \int_0^M \int_0^{2\pi} \frac{dy d\varphi}{[K^2 y + g^4 - 2g^2 k_e' y^{1/2} \cos \varphi]^2}.$$

Wir führen zunächst die Integration nach φ aus. Das geht sehr leicht auf komplexem Weg mit der Substitution $z = e^{i\varphi}$. Integrationsweg ist der Einheitskreis um $z = 0$. Von den beiden Polen liegt wegen

$$(28) \quad (K^2 y + g^4)^2 \gg g^4 k_e'^2 y$$

immer der eine außerhalb und der andere innerhalb des Einheitskreises.

Man erhält, wenn man (28) berücksichtigt

$$L' = 2\pi K^4 \int_0^M \frac{dy}{[K^2 y + g^4]^2} \approx \frac{2\pi K^2}{g^4}.$$

Wir erhalten also für den Strom im Fall 1 mit (26), (27), (25), (6a) und (2):

$$(29) \quad J' = 1024\pi^8 \frac{e^4 m^3}{h^4} K \sum |a_n|^2 \frac{k'_{III}}{(k'_{III} + k')^2} \frac{1}{g^4}.$$

$$\text{Dimension: } [Länge]^2 = \frac{\text{Stromstärke}}{\text{Stromdichte}}.$$

Die Diskussion erfolgt im nächsten Abschnitt.

Fall 2: Nach (23) ist $k' - k_0' = \mathfrak{S}_z = \frac{D}{\mathfrak{S}_z}$ und daher wird J'' nach (20'') und (25) ähnlich wie J' :

$$J'' = \frac{e}{m} \frac{h}{8} \sum |a_n|^2 C_1^2 \frac{k'_{III}}{(k'_{III} + k')^2} L''$$

mit

$$L'' = \int_0^M \int_0^{2\pi} \frac{D^2 K_e' d K_e' d\varphi}{K^2 [K^2 + K_e'^2]^2}.$$

Dieses Integral wird ganz ähnlich wie L' ausgewertet. Der einzige wesentliche Unterschied ist, daß ein neuer Pol bei $z = 0$

auftritt. Nach Integration über q erhält man unter Berücksichtigung von (28)

$$L'' = 6\pi K^2 \int_0^{M^2} \frac{k_e^2 y' dy}{[K^2 y + g^4]^2} \approx \frac{12\pi k_e^2}{K^2} \ln \frac{MK}{g^2}.$$

Es ist [vgl. (24)] $K \gg g$.

Wir wählen M, K, g als Vielfache von $\frac{1}{a}$. Dann ist $\frac{M}{a} > 1$,

$\frac{g}{a} > 1$; es wird also: $\ln \frac{MK}{g^2} \approx \ln aK$ und

$$(29'') \quad J'' = 6144\pi^8 \frac{e^4 m^2}{h^4} \sum_n |a_n|^2 k_e^2 \frac{\ln aK}{K^2} \frac{k'_{III}}{(k'_{III} + k')} \frac{1}{g^4}.$$

Wir bilden zum Schluß durch Integration über die Fermi-verteilung den Gesamtstrom S , der aus der Flächeneinheit austritt:

$$S = \sum S_n = \int J f d\omega; \quad d\omega = \frac{2(2l \cdot 1 \cdot 1)}{8\pi^3} dk_x dk_y dk_z. {}^1)$$

S ist dimensionslos $\left(\frac{\text{Stromdichte}}{\text{Stromdichte}} \right)$.

f sei die Fermiverteilung im absoluten Nullpunkt.

$f = 1$ für $0 \leq k^2 \leq \bar{k}^2$; $f = 0$ für $k^2 > \bar{k}^2$;

$\frac{\bar{k}^2}{\pi} = \bar{W}$ = Grenzenergie der Fermiverteilung.

Also:

$$(30) \quad S = \frac{4l}{8\pi^3} \int_0^{\bar{k}} dk_x \int_0^{\sqrt{\bar{k}^2 - k_x^2}} 2\pi J k_e dk_e,$$

für J sind die Werte aus (29'), (29'') einzusetzen.

Es muß bemerkt werden, daß wir, wenn wir die Fermi-verteilung in dieser Art ansetzen, als Energie des Elektrons $E(k) = -W_a + \frac{k^2}{\pi}$ annehmen müssen; d. h. also, daß wir die Energieänderung der Elektronen im Gitterfeld gegenüber der Energie der entsprechenden freien Elektronen (ΔE) vernachlässigen. Das ist aber hier ziemlich belanglos, denn ΔE geht in die Formel für J (29'), (29'') nur sehr unwesentlich ein und andererseits können wir die Integration nach k_x ohnehin nicht ausführen, weil die Abhängigkeit der a_n von k_x unbekannt ist.

1) A. Sommerfeld, Ztschr. f. Physik 47. S. 1, Gl. (17 a). 1927.

III. Diskussion

§ 11. *Untere Grenze.* Wir stellen zunächst fest, daß es bei Emission von Sekundärelektronen eine untere Grenze für die Primärenergie gibt, die sich in folgender Weise berechnet: Ein Primärelektron mit der kinetischen Energie $E_P = \frac{K^2}{x}$ hat im Metallinnern die kinetische Energie $E_P + W_a$; die maximale kinetische Energie der Metallelektronen ist \bar{W} , wobei $\bar{W} < W_a$ ist (\bar{W} ist die Grenzenergie der Fermiverteilung). Wegen des Pauliprinzipis kann das Primärelektron höchstens die Energie $E_P + W_a - \bar{W}$ abgeben, weil alle Elektronenzustände mit einer kinetischen Energie $W < \bar{W}$ besetzt sind. Das Sekundärelektron nimmt die Energie $\frac{1}{x} (k'^2 - k_x^2)$ auf:

$$(23a) \quad k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a} \cdot 1)$$

(Für die Energie des Elektrons setzen wir näherungsweise die des entsprechenden freien Elektrons.) Die kleinste Energieaufnahme bekommt man, wenn man in $k' k_x$ positiv und $n = 1$ setzt, also $k' = k_x + \frac{2\pi}{a}$. Sie ist

$$\frac{1}{x} (k'^2 - k_x^2) = \frac{1}{x} \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi}{a} k_x \right).$$

Wir verlangen also

$$x W_a < \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi k_x}{a} \right) < x (E_P + W_a - \bar{W}).$$

Im günstigsten Fall ist $\frac{4\pi^2}{a^2} > x W_a$, wir können dann $k_x = 0$ setzen und erhalten: $E_P > \bar{W}$. Die kleinste Primärenergie, die noch zu Sekundärelektronenemission führt, ist also größer als die Grenzenergie der Fermiverteilung, günstigstenfalls ist sie ihr gleich. Die Experimente ergeben in Übereinstimmung mit diesem Resultat etwa 15 Volt als Grenzgesehwindigkeit.²⁾

Das Bestehen einer unteren Grenze für die Sekundärelektronenemission ist nach dem Obenstehenden hauptsächlich eine Folge des Pauliprinzipis ganz im Gegensatz zur unteren Grenze des lichtelektrischen Effekts.

1) Wir haben bei dieser Überlegung die Voraussetzung $K^2 \gg x W_a$ fallen lassen. Die Bedingung (23a) wird aber trotzdem zutreffen, denn eine Mitberücksichtigung von W_a bei den Primärelektronen hätte, wie man aus der ganzen Berechnung leicht übersieht, hauptsächlich eine Verschiebung von K^2 nach $K^2 + x W_a$ zur Folge.

2) W. Bothe, Handb. d. Physik 24, S. 57.

§ 12. *Geschwindigkeitsverteilung.* Die Formeln (29') und (29'') stellen bis auf konstante Faktoren die Wahrscheinlichkeit dar, daß pro Sekunde 1 Elektron — mit der Geschwindigkeit $\frac{h}{2\pi m} k_{III}$ senkrecht zur Metalloberfläche — das Metall verläßt. Obwohl wir die Abhängigkeit der Faktoren $a_n(k_x)$ von n und k_x nicht kennen, können wir doch ein sehr wichtiges Ergebnis aus (29) ableiten. Wir wissen nämlich, daß für Metallelektronen die $a_n(k_x)$ für wachsende n rasch abnehmen. [Wie schon bemerkt, hat Morse (a. a. O.) für einen speziellen Fall die $a_n(k_x)$ berechnet.] Andererseits sind die $a_n(k_x)$ für kleine k_x größer als für große, weil die ersteren stärker gebundenen Elektronen entsprechen.

Zur Diskussion der Formeln (29'), (29'') und (30) benötigen wir außer dem Verhalten der $a_n(k_x)$ insbesondere die Werte von k' bzw. k'_{III} . Das sind die Werte der k' an den Resonanzstellen, d. h. Werte von k' , bei denen für einzelne Partialwellen der ungestörten Eigenfunktion (1) der Impulssatz erfüllt ist. Wir haben diese k' in § 9, Gl. (23a) berechnet. Es war $k' = \pm k_x + \frac{2\pi n}{a}$ und wir mußten verlangen, daß $k' > 0$ und $k'^2 > \kappa W_a$ ist, damit Emission ins Gebiet III eintritt.

Für $n = 0$, d. h. in der Näherung freier Elektronen, haben wir, wie schon anfangs bemerkt wurde, keine Emission. Da also das Glied mit $|a_0|^2$ in (29) wegfällt, berücksichtigen wir zunächst als größtes Glied das mit $n = 1$. $\frac{1}{\kappa} \frac{4\pi^2}{a^2}$ ist gewöhnlich etwas größer als W_a (z. B. für Silber ist $\bar{W} \sim 6$ Volt, $W_a \sim 10$ Volt, $\frac{1}{\kappa} \frac{4\pi^2}{a^2} \sim 17$ Volt). Es wird also die kinetische Energie der Sekundärelektronen außerhalb des Metalls

$$\frac{1}{\kappa} k_{III}^2 \leq \frac{1}{\kappa} \left(k + \frac{2\pi}{a} \right)^2 - W_a \quad (\text{für Silber ist das 25 Volt}).^1)$$

Wir haben also in erster Näherung unabhängig von der Primärenergie nur Sekundärelektronen bis zu einer Geschwindigkeit von höchstens 25 Volt.

In nächster Näherung haben wir erstens

$$k' = k_x + \frac{2\pi n}{a} + \mathcal{E}_x$$

zu setzen [\mathcal{E}_x ist negativ und proportional $1/K$ (23)] und zweitens $n = 2$ mit zu berücksichtigen. Das bedeutet erstens, daß die Geschwindigkeitsverteilung sich mit wachsender Primär-

1) Für andere Metalle ungefähr gleich groß.

energie etwas zugunsten höherer Geschwindigkeiten verschiebt und daß man zweitens eine geringere Anzahl von Elektronen mit größerer Geschwindigkeit hat. Die relative Menge der letzteren ist wieder nahezu unabhängig von der Primärenergie.

Diese Ergebnisse sind experimentell längst bekannt.¹⁾ Sie bestätigen in sehr schöner Weise die Existenz der Energiebanden, die im Metall an die Stelle der diskreten Energiestufen des Atoms treten.²⁾

§ 13. *Abhängigkeit der Ausbeute von der Primärenergie.* Es genügt hier, $n = 1$ zu berücksichtigen.

Die Gleichungen (29'), (29'') liefern:

$$\text{im Fall 1: } J \sim K \sim E_p^{1/2},$$

$$\text{im Fall 2: } J \sim \frac{\ln a K}{K^2} \sim \frac{\ln \frac{E_p}{W_a}}{E_p^{3/2}}$$

$$\left(E_p = \frac{K^2}{\kappa} = \text{kinetische Energie der Primärelektronen} \right).$$

Das heißt also wegen (24): nahe der Grenzggeschwindigkeit (etwa 20 Volt) steigt die Sekundärelektronenemission mit $E_p^{1/2}$ an; in großer Entfernung davon ($\text{Primärenergie} \gg 20 \text{ Volt}$)

fällt sie mit $\frac{\ln \frac{E_p}{W_a}}{E_p^{3/2}}$. Das Zwischengebiet läßt sich nur bei

genauerer Kenntnis der Eigenfunktionen berechnen. Die experimentellen Ergebnisse zeigen nahe der Grenzggeschwindigkeit ein Ansteigen — das tatsächlich ungefähr mit $E_p^{1/2}$ geht — und für hohe Primärenergien ein Fallen der Intensität. Ob das letztere

aber wie $\frac{\ln \frac{E_p}{W_a}}{E_p^{3/2}}$ geht, läßt sich nach dem vorliegenden experimentellen Material nicht beurteilen.

Von der Intensität der Sekundärelektronen an der Austrittsseite läßt sich (obwohl das hier nicht näher behandelt wurde) sagen, daß sie, unter Vernachlässigung der Absorption, viel größer sein muß als die Intensität an der Eintrittsseite, weil bei ersterer die Koeffizienten a_0 , d. h. die Näherung der

1) W. Bothe, Handb. (a. a. O.); P. Lenard u. A. Becker, Handb. d. Experimental-Physik, 14. S. 389.

2) (23a) mit $n = 1$ bedeutet ja Übergang in die nächst höhere Bande (vgl. R. Peierls, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 121. 1930).

freien Elektronen den wesentlichen Beitrag liefert. Dies wurde für dünne Schichten auch experimentell bestätigt.¹⁾ Eine eingehendere Behandlung dürfte für diesen Fall aber nur dann zweckvoll sein, wenn es gelingt, auch die Absorption zu erfassen, denn diese spielt bei der Emission an der Austrittsseite natürlich eine viel größere Rolle als an der Eintrittsseite.

Es soll auch noch bemerkt werden, daß wir alle Sekundärelektronen, die aus inneren Schalen stammen (Anregung zur Röntgenstrahlung) nicht berücksichtigt haben. Bei großen Primärenergien werden natürlich auch diese einen Beitrag liefern; man kann hier aber in großer Annäherung die Eigenfunktionen des freien Atoms zur Berechnung benutzen und die Ergebnisse aus der Arbeit von Bethe (a. a. O.) entnehmen.

§ 14. *Absolute Ausbeute.* Wegen der starken Absorptions- und Oberflächeneinflüsse genügt natürlich eine sehr rohe Abschätzung.

Sei N_0 die Zahl der Sekundärelektronen, die pro Sekunde aus der Volumeneinheit ausgelöst würden, wenn keine Absorption vorhanden wäre. γ_P sei der Absorptionskoeffizient der Primärelektronen, γ_s der Absorptionskoeffizient der Sekundärelektronen. N sei die Zahl der Elektronen, die pro Sekunde die Flächeneinheit verlassen. Es ist dann

$$N = \frac{N_0}{\gamma_P + \gamma_s} \approx \frac{N_0}{\gamma_s},$$

weil für nicht zu langsame Primärelektronen $\gamma_s \gg \gamma_P$. Wir schätzen N_0 in der Weise ab, daß wir den mittleren Strom für ein Elektron [(29') für einen mittleren Wert von k_z] mit der Anzahl der sogenannten freien Elektronen ($\sim 10^{23}$) multiplizieren und erhalten (100 Volt Primärenergie): $N \approx |\bar{a}_1|^2 \cdot 10^3$. Für γ_s haben wir bei diesen langsamen Elektronen (die meisten haben Geschwindigkeiten unter 10 Volt) 10^7 gesetzt²⁾; $|\bar{a}_1|^2$ (\bar{a}_1 bedeutet einen Mittelwert von a_1 über alle k_z) dürfte $\sim 10^{-2}$ bis 10^{-3} sein (vgl. Morse, a. a. O.).

Wir bekommen demnach eine *Ausbeute in der Größenordnung 1 Sekundärelektron pro 1 Primärelektron*, ein Ergebnis, das experimentell bestätigt wird.³⁾ (Die experimentellen Ergebnisse schwanken um mindestens eine Zehnerpotenz.)

1) P. Lenard u. A. Becker (a. a. O.) S. 273.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 249. 1929 fand für Elektronen unter 100 Volt $1,5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$; für die ganz langsamen Elektronen dürfte also 10^7 in der richtigen Größenordnung liegen.

3) W. Bothe, a. a. O.

IV. Zusammenfassung der Resultate

Es werden die in einem Metall an der Eintrittsseite ausgelösten Sekundärelektronen berechnet. Sämtliche Resultate sind in Übereinstimmung mit den Experimenten.

1. Es existiert zur Auslösung von Sekundärelektronen eine untere Grenze für die Primärenergie in der Größenordnung 10 Volt, die hauptsächlich durch das Pauliprinzip bedingt ist.

2. Die Sekundärelektronen haben (in erster Näherung) unabhängig von der Primärenergie Geschwindigkeiten unter 25 Volt.

Bei dünnen Schichten ist die Emission an der Austrittsseite viel größer als die an der Eintrittsseite.

3. Die Ausbeute steigt nahe der Grenzenergie mit $E_p^{1/2}$ an

und fällt für große Primärenergien mit $\frac{\ln \frac{E_p^{1/2}}{W_a}}{E_p^{1/2}}$.

4. Die absolute Ausbeute ist für 100 Volt Primärenergie ungefähr 1 Sekundärelektron pro 1 Primärelektron.

Freiburg i. Br., Physikalisches Institut der Universität
18. Dezember 1931.

(Eingegangen 6. Januar 1932)

e aus
ultate

n eine
dnung
gt ist
g) un-
5 Volt
tritts-

σ'_P AE

nergie

rsität